# الفصل الثاني

# التكامل الموسع

## 1.2 التكامل الموسع على $\pm\infty$.

### 1.1.2. تعاريف

**تعريف 1.1.2 :** إذا كان $f$ مستمر أو مستمر في قطع على $[a,+\infty[$ ، نقول ان

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

تكامل موسع على $+\infty$.
يتقارب إذا كان $\int_a^M f(t)\,dt$ يقبل نهاية محدودة عندما $M \to +\infty$ ونكتب عندها

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

(وإلا فإنه يتباعد.) بنفس الطريقة $-\infty$.

**مثال 1 :** بين أن $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (موسع عند $+\infty$)متقارب ثم أحسب قيمته.

$$\int_0^M e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = -e^{-M}+1 \to 1$$

ومنه $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ يتقارب وقيمته $1$.

**تمرين 1 :** تكاملات ريمان: بين أنه إذا كان $\alpha > 1$ فإن $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ يتقارب و يتباعد إذا كان $\alpha \leqslant 1$.

**خصائص**

**أبسطها هو العودة إلى التكامل الجزئي الذي لا توجد فيه مشكلة تقارب إذا لم يكن كذلك ، فمن الضروري أولاً إثبات تقارب كل جزء قبل العمل.**

**اقتراح 1 :**

1) **علاقة شال: إذا كان** $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ **متقارب فإن**

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt$$

2) **الخطية: إذا كان**

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{و} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt,$$

**متقارب فإن:**

$$\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

3) **الإيجابية: إذا كان**

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \qquad \text{و} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

**متقارب حيث:**

$$f(t) \leqslant g(t) \quad \text{على} \quad [a, +\infty[$$

**فإن:**

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

4) **تكامل دالة محدودة: إذا كان**

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$$

**متقارب فإن:**

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

**قابلة للإشتقاق أين تكون الدالة** $f$ **مستمرة و**

$$G'(x) = f(x)$$

**مثال 2 :** ليكن

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^2} dt.$$

أثبت أن $F$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ ثم أحسب المشتق الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(t) = \frac{e^t}{t^2}$$

المستمرة على $\mathbb{R}^*$.

من أجل $a < 0,$ التكامل الموسع على $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^t}{t^2} dt$$

متقارب و محدود $\left(\frac{e^t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}\right)$ للدوال الموجبة. ومنه $F$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty, a]$ و

$$F'(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

**تمرين 2 :** نعود إلى التكامل الجزئي. أحسب

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

**نظرية 1.1.2 :** إذا كان $f$ و $g$ موجبة و $g \leqslant f$ على $[a, +\infty[$ (أو $f = o(g)$ ) فإنه إذا كان $\int_a^{+\infty} f$ متباعد فإن $\int_a^{+\infty} g$ متباعد ايضاً عن طريق الحد السفلي للدالة الموجبة.

إذا كان $\int_a^{+\infty} g$ متقارب فإن $\int_a^{+\infty} f$ متقارب أيضاً عن طريق الحد العلوي للدالة الموجبة.

**نظرية 2.1.2 :** إذا كان $f$ و $g$ موجبة حيث $f \sim g$ على $+\infty$ فإن

$$\int_a^{+\infty} f \quad \text{و} \quad \int_a^{+\infty} g$$

هم من نفس الطبيعة، بإستعمال تكافؤ الدوال الموجبة.

**ملاحظة 1 :** تكامل ريمان

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

متقارب إذا كان $\alpha > 1$ ومتباعد إذا كان $\alpha \leqslant 1$.

الدالة الأسية :

$$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x} dx$$

متقارب إذا كان $\alpha < 0$ ومتباعد إذا كان $\alpha \geq 0$

**مثال 3 :** إثبات تقارب

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$$

موسع عند $+\infty$.

نبحث عن تكافؤ معروف مثلا:

$$\frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} = \frac{x^2 \left(1 + e^{-x}/x\right)}{x^4 \left(1 + 1/x^3\right)} \sim \frac{1}{x^2} \geq 0$$

حيث التكامل يتقارب عند $+\infty$. ومنه، بإستعمال تكافؤ الدوال الموجبة

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{x^4 + x} dx$$

يتقارب.

**نظرية 3.1.2 :** إذا كان $\int_a^{+\infty} |f|$ متقارب فنقول $\int_a^{+\infty} f$ متقارب مطلقا. فهو إذا متقارب

تتيح هذه النظرية إمكانية تطبيق معايير المقارنة السابقة على الدوال ذات الإشارة المتغيرة.

**نتيجة 1 :** إذا كانت $f$ دالة موجبة مستمرة أو مستمرة على قطع ومتناقصة، فإن السلسلة: $\sum_{k\geq 0} f(k)$ و التكامل الموسع على $+\infty$ : $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ لها نفس الطبيعة.

ميزة دراسة تقارب التكامل بدلاً من تقارب السلسلة يعطينا المزيد من الدوال الأصلية حيث يمكننا القيام بعمليات تكامل جزئية.

## 2.2 التكامل الموسع على نقطة

**تعريف 1.2.2 :** لتكن الدالة $f$ مستمرة أو مستمرة على قطع $]a, b]$. نقول أن $\int_a^b f$ تكامل موسع عند $a$.
إذا كان $\int_x^b f$ يقبل نهاية منتهية لما $x \to a,$ نقول أن $\int_a^b f$ يتقارب و

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a} \int_x^a f.$$

**مثال 1 :** إثبت التقارب وأحسب $\int_0^1 \ln(t)\, dt$.

من أجل

$$x > 0 : \int_x^1 \ln(t)\, dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 + x\ln(x) - x \to -1,$$

ومنه $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ يتقارب نحو القيمة 1

**ملاحظة 1 :** تكامل ريمان $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ متقارب إذا كان $\alpha \geq 1$ و يكون متباعد إذا كان $\alpha < 1$. (هو عكس السلوك عند $+\infty$ )

**نظرية 1.2.2 :** نظريات المقارنة والحصر بالقيمة الصغرى والكبرى للدوال الموجبة تبقى محققة أما علاقة شال والخاصية الخطية والإيجابية لاتتحقق إلا بعد التحقق من تقارب كل جزء.

**ملاحظة 2 :** إذا كان التكامل غير موسع في عدة نقاط، فإننا نعزل كل نقطة من نقاط الشوائب. سوف نتقارب إذا تقاربت عند كل نقطة من نقاط الشوائب ستكون مجموع التكاملات الجزئية الموسعة.

**مثال 2 :** ليكن $f(x) = \frac{1}{x^2}$ إذا كان

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{إذا كان} \quad x \in [0,1] \\ f(x) = e^{-x} & \text{إذا كان} \quad x > 0. \end{cases}$$

أحسب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

الدالة $f$ مستمرة على قطع $]-\infty, 0[$ و $[0, +\infty[$ فإن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ موسع عند $-\infty$, عند $0^-$ وعند $+\infty$

**اقتراح 1 :** 1) a) عند : $-\infty$

$$\int_x^{-1} f(t)\, dt = \int_x^{-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{-1} = 1 + \frac{1}{x} \to 1$$

ومنه

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt = 1.$$

يمكننا أيضاًا رؤية التقارب من قبل ريمان

b) عند : $0^-$

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{-t}}dt = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = -2\sqrt{x} + 2 \to 2$$

**ومنه**

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = 2.$$

c) عند : $+\infty$

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_{0}^{x} = -e^{-x} + 1 \to 1$$

**فإن**

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

2) **ومنه التكامل :** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ **يتقارب نحو**

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 4$$

# سلسلة التمارين رقم 3

**تمرين 1 :** أدرس طبيعة التكاملات التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt, \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt, \qquad \int_{0}^{1} \frac{t}{\left(1-t\right)^2} dt,$$
$$\int_{2}^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt.$$

**تمرين 2 :** لتكن الدالة $F$ المعرفة كما يلي:

$$F\left(x\right) = \int_{1}^{x} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt.$$

1) أحسب $F\left(x\right)$.

2) إستنتج أن التكامل $F\left(+\infty\right)$ متقارب و أوجد قيمته.

**تمرين 3 :** أثبت أن التكامل

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin\left(t\right)}{t} dt.$$

متقارب لكن ليس متقارب مطلقا.

**تمرين 4 :** نضع

$$I_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{nt}}{\left(1+e^t\right)^{n+1}} dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) تحقق من وجود $I_n$ ( التكامل متقارب ).

2) أوجد علاقة تراجع بين $I_n$ .

3) إستنتج $\lim_{n\to\infty} I_n$ .