**1.4.2. Méthode de Runge-Kutta d’ordre 4**

En reprenant le développement de Taylor de la fonction *f*, mais cette fois jusqu'à l'ordre 5, un raisonnement similaire à celui qui a mené aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 aboutit à un système de 8 équations non linéaires comprenant 10 inconnues. Le résultat final est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui représente un outil d'une grande utilité.

***Algorithme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4***

1. Étant donné un pas de temps h, une condition initiale (t0 , y0) et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour 0 ≤ n ≤ N

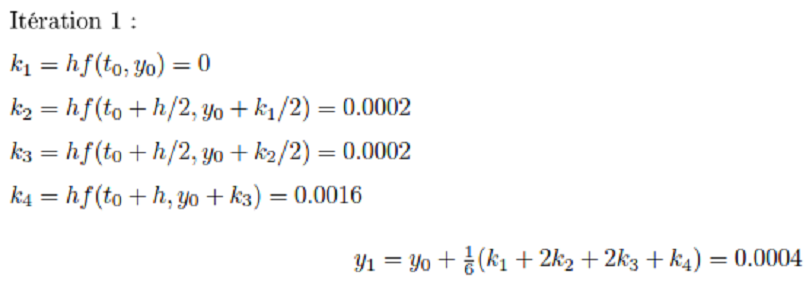
Ecrire ,

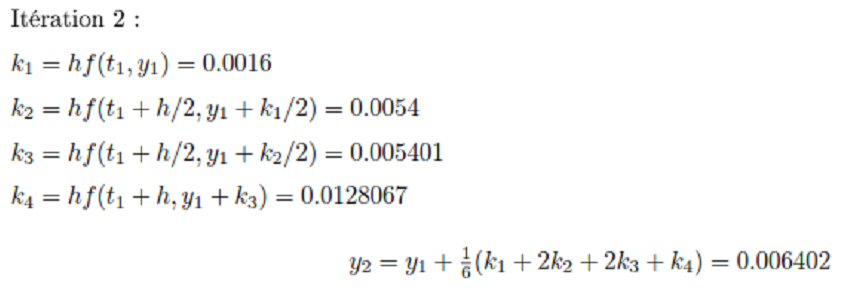
3. Arrêt

***Exemple 1 :***

Soit l'équation différentielle : et la condition initiale *y(0) = 0*. On a donc *t0 = 0* et *y0 = 0*, et on prend un pas de temps *h = 0.2*. En utilisant la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4, calculer *y1 = y(0.2)* et *y2 = y(0.4)*approximations de la solution exacte *y(t)* du problème aux points *t1 = 0.2* et *t2 = 0.4*.

L’algorithme devient :

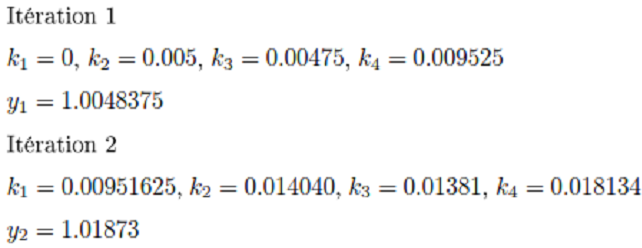




***Exemple 2 :***

Soit l'équation différentielle : *y'(t) = - y(t) + t* ; et la condition initiale *y(0) = 1*. On a donc

*t0 = 0 et y0 = 1*, et on prend un pas de temps *h = 0.1*. L’algorithme devient :



**1.5. Systèmes d’équations différentielles**

La forme générale d'un système de *m* équations différentielles avec conditions initiales s'écrit :

Parmi les méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles, nous ne présentons que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

***Algorithme de la méthode de R-K4 pour résoudre les systèmes d'équations différentielles***

1. Étant donné un pas de temps *h*, une condition initiale (*t0 , y1,0 , y2,0 , …, ym,0)* et un nombre maximal d'itérations N;

2. Pour 0 ≤ n ≤ N

Pour *i = 1, 2, …, m*

Pour *i = 1, 2, …, m*

Pour *i = 1, 2, …, m*

Pour *i = 1, 2, …, m*

Pour *i = 1, 2, …, m*

*tn+1 = tn + h*

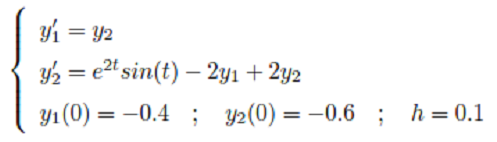
*Pour i = 1, 2, …, m*

Écrire *tn+1* et *yi,n+1*

3. Arrêt.

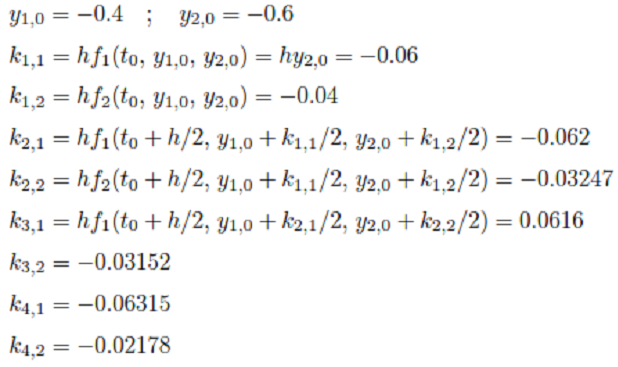
***Exemple 1 :***

Considérons le système de deux équations différentielles d’ordre 1 suivant :

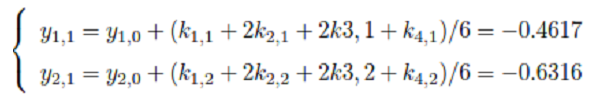


Appliquons la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4 à ce système.

On a :

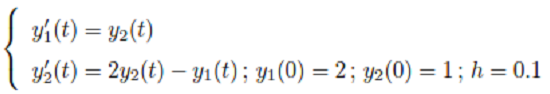


On aura donc :

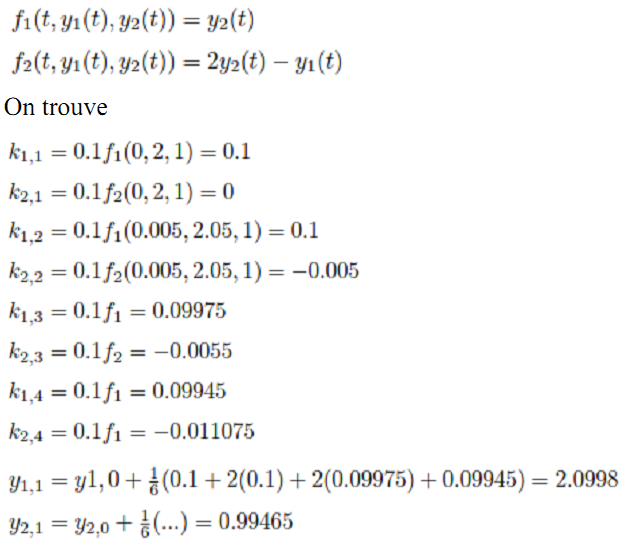


***Exemple 2 :***

Soit le système de deux équations différentielles d’ordre 1 suivant :



On a alors :



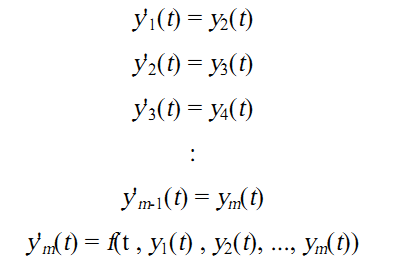
**1.6. Equations d’ordre supérieur**

Une équation différentielle d'ordre m avec conditions initiales est parfaitement équivalente à un système de *m* équations différentielles d'ordre 1. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre *m* avec conditions initiales est :

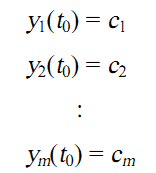
avec m conditions initiales :

*y(t0) = c1, y'(t0) = c2, …, y(m-2)(t0) = cm-1, y(m-1)(t0) = cm*

L'équation différentielle d'ordre *m* avec les *m* conditions initiales est équivalente au système de m équations d'ordre 1 suivant :



avec



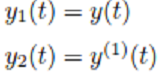
Une fois l'équation d'ordre m transformée en un système de *m* équations différentielles d'ordre 1, on peut recourir à l'algorithme de la méthode de R-K d'ordre 4.

***Exemple 1 :***

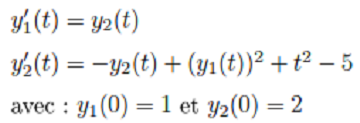
Soit l'équation différentielle *: y(2)(t) = - y(1)(t) + (y (t))2 + t2 - 5*; et la condition initiale

*y(0) = 1 ; y(1)(0) = 2*.

On pose :

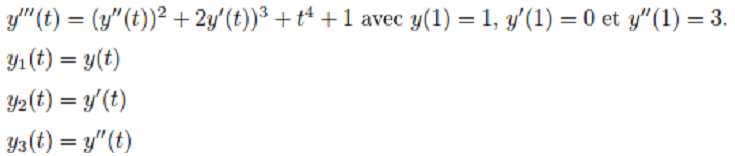


On obtient le système de 2 équations différentielles du premier ordre suivant :



***Exemple 2 :***

Soit l'équation différentielle du 3ième ordre :



On obtient le système de 3 équations différentielles du premier ordre suivant :

