كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

الرياضيات 2 — **السلسلة رقم 03**

التمرين 1:(01) أوجد نوع المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&5&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4&1\\0&5&0\\2&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}12&4\\4&1\\1&1\end{pmatrix}$$

1) من المصفوفات السابقة أوجد العناصر: $a_{22}, a_{31}, b_{12}, b_{22}, b_{31}, c_{12}, c_{22}, c_{23}$.

التمرين 2: 1) أوجد x,y,z,w إذا كان : $\begin{pmatrix}x+y&2z+w\\x-y&z-w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\1&4\end{pmatrix}$

1) أوجد x,y,z,t حتى يكون : $\begin{pmatrix}x+y&z+3\\y-4&z+w\end{pmatrix}=0_2$

التمرين 3: ليكن المصفوفات التالية :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&-6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&0&2\\-7&1&8\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&5\\1&-2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&7\\2&-3\\0&-1\end{pmatrix}$$

1) أحسب المجاميع التالية إن أمكن: A+B, C+D .
2) أحسب مايلي : 3D, -5A, 2A-3B .
3) أوجد x,y,z,w حيث :

$$3\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&6\\-1&2w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&x+y\\z+w&3\end{pmatrix}$$

التمرين 4: أوجد الجداء AB في الحالات التالية :

$$1)A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix},2)A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&-4\\3&-2&6\end{pmatrix}$$

التمرين 5: أوجد منقول المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&5\\2&0&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\\0&5\end{pmatrix}$$

التمرين 6: ليكن f تطبيق خطي معرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ كم يلي $f(x,y)=(2x-5y,3x+y)$ نسبة إلى الأساس $B=\{u_1=(2,1),u_2=(3,2)\}$ في $\mathbb{R}^2$.

1. أحسب $f(u_1)$ ثم أكتب النتيجة في الأساس B .
2. أحسب $f(u_2)$ ثم أكتب النتيجة في الأساس B .

3. أوجد المصفوفة المرفقة ل f في الأساس B.

4. أحسب صورة الشعاع v=(3,4) بواسطة f في الأساس B باستعمال المصفوفة المرفقة ل f.

<u>التمرين 7:</u> ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

1) أحسب صورة الشعاع v=(2,3) بواسطة f.

2) أوجد عبارة f(x,y).

<u>التمرين 8:</u> أحسب المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

<u>التمرين 9:</u> أحسب مقلوب المصفوفات التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

المقياس: رياضيات 02 — 2020/2019

الحل النموذجي للسلسلة رقم 03

التمرين الأول: الشكل التالي يمثل مصفوفة

$$\begin{array}{cc} & \text{عمود} \\ \text{سطر} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix} \end{array}$$

- نقول أن المصفوفة ذات m سطر و n عمود.
- درجة المصفوفة هي $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- A مصفوفة من الدرجة 2×3. $a_{22}=5$, $a_{13}=1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

- B مصفوفة من الدرجة 3×3.

$b_{12}=4$, $b_{22}=5$, $b_{31}=2$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

- C مصفوفة من الدرجة 3×2.

$c_{12}=4$, $c_{22}=1$, $c_{32}=1$

التمرين الثاني:

- تساوي المصفوفات

A و B مصفوفتان حيث $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ و } B \text{ من نفس الدرجة} \\ a_{ij}=b_{ij} \quad , \ i=1,\dots,m \ , \ j=1,\dots,n \end{cases}$$

- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.
- المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون عدد أسطرها مساو لعدد أعمدتها أي: $m=n$

1 - إيجاد x, y, z, w حيث

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 & \text{......} (1) \\ 2z+w = 5 & \text{......} (2) \\ x-y = 1 & \text{......} (3) \\ z-w = 4 & \text{......} (4) \end{cases}$$

(1) + (3) يعطي $2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$

نعوض بقيمة x نجد:

$$\boxed{y=1}$$

نضرب (4) × (−2)

$$-2z+2w=-8 \quad \text{......} (5)$$

(5) + (2) تعطي $3w=-3 \Rightarrow \boxed{w=-1}$

نعوض بقيمة w نجد $\boxed{z=3}$

إذن:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \\ w = -1 \end{cases}$$

إيجاد x, y, z, w حيث

$$\begin{pmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+3=0 \\ y-4=0 \\ z+w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-3 \\ y=4 \\ w=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ z=-3 \\ y=4 \\ w=3 \end{cases}$$

التمرين الثالث :

- يكون الجمع ممكنا اذا كانت المصفوفتان من نفس الدرجة أي لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة .

وبالتالي المجموع الممكن هو $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- لضرب مقدار سلمي في مصفوفة يكفي ضربه في كل عدد من المصفوفة

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3D = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 7 \\ 3\times 2 & 3\times(-3) \\ 3\times 0 & (-1)\times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 6 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ -20 & -25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} , \quad -3B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$2A-3B = \begin{pmatrix} 2-9 & -4+0 & 6-6 \\ 8+21 & 10-3 & -12-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$$

• إيجاد x, y, z, w حيث:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x+4 \\ 3y = x+y+6 \\ 3z = z+w-1 \\ 3w = 2w+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2y = x+6 \\ 2z = w-1 \\ w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$$

التمرين 04:

◄ يكون الجداء ممكنا اذا تحقق الشرط التالي:

عدد أعمدة المصفوفة الأولى يجب أن يساوي عدد

أسطر المصفوفة الثانية.

$A \times B$ ممكن اذا كانت A من الدرجة $m \times n$

و B من الدرجة $n \times p$

والمصفوفة الناتجة من الدرجة $m \times p$

• حساب الجداء $A\times B$

① $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

A من الدرجة 3×2 و B من الدرجة 2×3
ومنه الشرط محقق.

$$A\times B = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1} \\ 1 \quad\; 0 \\ -3 \quad 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -5 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 1 + (-1)\times 3 & 2\times(-2) + (-1)\times 4 & 2\times(-5) + (-1)\times 0 \\ 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times(-2) + 0\times 4 & 1\times(-5) + 0\times 0 \\ (-3)\times 1 + 4\times 3 & (-3)\times(-2) + 4\times 4 & (-3)\times(-5) + 4\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة من الدرجة 3×3

$$\begin{matrix} A & \times & B & = & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3\times 2 & & 2\times 3 & & \underbrace{3\times 3} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$ ②

A من الدرجة 2×2 و B من الدرجة 2×3

ومنه الشرط محقق.

$$A \times B = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2 + 3\times 3 & 1\times 0 + 3(-2) & 1(-4) + 3\times 6 \\ 2\times 2 + (-1)(3) & 2\times 0 + (-1)(-2) & 2(-4) + (-1)6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

التمرين 05: حساب منقول مصفوفة

A مصفوفة

منقول مصفوفة هو تحويل أعمدتها إلى أسطر

ونرمز لها بـ A^t.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t = (1, 2, 3).$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

التمرين 06:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (2x - 5y, 3x + y)$$

$B = \{u_1 = (2,1), u_2 = (3,2)\}$ أساس في $\mathbb{R}^2$.

1 - حساب $f(u_1)$:

$$f(u_1) = f(2,1) = (2\times 2 - 5\times 1, 3\times 2 + 1) = (-1, 7)$$

كتابة $f(u_1)$ في الأساس B :

$$f(u_1) = (-1,7) = \alpha u_1 + \beta u_2$$
$$= \alpha(2,1) + \beta(3,2)$$
$$= (2\alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -1 \quad \dots\dots ① \\ \alpha + 2\beta = 7 \quad \dots\dots ② \end{cases}$$

بضرب ② × (-2) نتحصل

$$-2\alpha - 4\beta = -14 \quad \dots ③$$

③ + ① تعطي

$$-\beta = -13 \Rightarrow \boxed{\beta = 13}$$

نعوض بقيمة β في ② نجد

$$\boxed{\alpha = -23}$$

ومنه :

$$f(u_1) = -23u_1 + 13u_2$$

2 - حساب $f(u_2)$:

$$f(u_2) = f(3,2) = (6 - 10, 9 + 2) = (-4, 11)$$

كتابة $f(u_2)$ في الأساس B :

$$f(u_2) = (-4,11) = \alpha u_1 + \beta u_2$$
$$= \alpha(2,1) + \beta(3,2)$$
$$= (2\alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -4 & \text{......} \; (1) \\ \alpha + 2\beta = 11 & \text{......} \; (2) \end{cases}$$

نضرب (2) × (-2) نتحصل

$$-2\alpha - 4\beta = -22 \quad \text{....} \; (3)$$

(1) + (3) تعطي

$$-\beta = -26 \Rightarrow \boxed{\beta = 26}$$

نعوض بقيمة β في

$$\alpha = 11 - 52 = -41$$

ونجد

$$f(u_2) = -41 u_1 + 26 u_2$$

3. المصفوفة المرفقة لـ f في B.

$$M_f(B) = \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \\ \end{array}$$
$$M_f(B) = \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

4. حساب صورة $V = (3,4)$ بواسطة f في B باستخدام M_f

لدينا :

$$f(x,y) = M_f(B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(3,4) = \begin{pmatrix} -23 & -41 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -233 \\ 144 \end{pmatrix}$$

التمرين 08: حساب المحددات

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3 - 1\times0 = 6$$

حساب المحدد

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ط1:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & \boxed{6} & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[(2\times0)-(1\times4)\right] - 6\left[(3\times0)-(4\times4)\right] + 1\left[(3\times1)-(4\times2)\right]$$

$$= 83$$

ط2: طريقة ساروس (تستخدم فقط في المصفوفات 3x3)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right.$$

- نضيف عمودين الأول والثاني
- نضرب العناصر المتواجدة على نفس اتجاه السهم في بعضها

المشار إليها بسهم أزرق
والمشار إليها بسهم أحمر ونقوم بالفرق

$$= \left[(2\times2\times0)+(6\times4\times4)+(1\times3\times1)\right] - \left[(4\times2\times1)+(1\times4\times2)+(0\times3\times6)\right]$$

$$= 83$$

التمرين 07 : f تطبيق خطي معرف بالمصفوفة

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

من الواضح من خلال A أن:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

لأن عدد أعمدة المصفوفة يساوي بعد مجموعة البدء
عدد الأسطر يساوي بعد مجموعة الوصول:

1- إيجاد عبارة $f(x,y)$:

باستخدام الأساس القانونية للفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$

$\{e'_1=(1,0,0), e'_2=(0,1,0), e'_3(0,0,1)\}$ و $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$

$$\begin{cases} f(e_1)=f(1,0)=3(1,0,0)+2(0,1,0)+5(0,0,1)=(3,2,1) \\ f(e_2)=f(0,1)=-1(1,0,0)+4(0,1,0)-6(0,0,1)=(-1,4,-6) \end{cases}$$

لدينا:

$$(x,y) = x e_1 + y e_2$$
$$= x(1,0) + y(0,1)$$

ومنه:

$$f(x,y) = f\big(x(1,0)+y(0,1)\big)$$

وبما أن f تطبيق خطي

$$f(x,y) = x f(1,0) + y f(0,1)$$
$$= x(3,2,5) + y(-1,4,-6)$$

إذن:

$$\boxed{f(x,y) = (3x-y, 2x+4y, 5x-6y)}$$

2- حساب صورة $V=(2,3)$ بواسطة f:

$$f(V)=f(2,3)=(3\times2-3\ ,\ 2\times2+4\times3\ ,\ 5\times2-6\times3)$$

$$f(2,3)=(3,18,-8)$$

أو باستخدام المصفوفة $M_f=A$

$$f(x,y)=M_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$f(2,3)=\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\\5&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\18\\-8\end{pmatrix}.$$

التمرين 09: مقلوب مصفوفة

لحساب مقلوب مصفوفة نستخدم القانون:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\left[adj(A)\right]^{t}\quad,\quad |A|\neq 0$$

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}2&6&1\\3&2&4\\4&1&0\end{pmatrix}$$

• حساب $|A|$:

من التمرين 08

$$|A|=\begin{vmatrix}2&6&1\\3&2&4\\4&1&0\end{vmatrix}=83\neq 0$$

• إيجاد $adj(A)$:

$$adj(A)=\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}&a'_{13}\\a'_{21}&a'_{22}&a'_{23}\\a'_{31}&a'_{32}&a'_{33}\end{pmatrix}$$

حيث:

$$a'_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$

- $a'_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$

- $a'_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16$

- $a'_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5$

- $a'_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

- $a'_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$

- $a'_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 22$

- $a'_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22$

- $a'_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$

- $a'_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14$

ومنه :

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

$$[\operatorname{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$A^{-1} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/83 & 1/83 & 22/83 \\ 16/83 & -4/83 & -5/83 \\ -5/83 & 22/83 & -14/83 \end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة نجد

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$