كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

رياضيات 2 — **السلسلة رقم 02**

التمرين 01: هل التطبيقات التالية خطية أم لا ؟

1) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=(x,y,0)$

2) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+1,y+2)$

3) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(x+y,x)$

4) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z)=2x-3y+4z$

5) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y)=(x+1,2y,x+y)$

6) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=(2x-y,x)$

التمرين 02: 1) بين أن يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ يحقق $f(1,2)=(2,3)$ و $f(0,1)=(1,4)$

2) أوجد صيغة f أي أوجد $f(x,y)$ ثم أوجد $f(5,6)$ و $f^{-1}(-2,7)$

التمرين 03: لنفترض أن $F:V \longrightarrow U$ و $G:U \longrightarrow W$ تطبيقان خطيان, بين أن تطبيق التركيب $G\circ F:V \longrightarrow W$ تطبيق خطي.

التمرين 04: ليكن $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة

$f(x,y,s,t)=(x-y+s+t,x+2s-t,x+y+3s-3t)$ أوجد قاعدة الصورة Imf وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة kerf و كذلك بعدها.

التمرين 05 : ليكن $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي المعرف بواسطة

$f(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$ أوجد قاعدة الصورة Imf وكذلك بعدها, و أوجد قاعدة للنواة kerf و كذلك بعدها.

التمرين 06: أوجد تطبقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تكون صورته مولدة بواسطة $(2,0,-1,-3)$ و$(1,2,0,-4)$

لتمرين 07: أوجد تطبقا خطيا $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تكون الأشعة $(2,0,1)$ و$(1,-1,0)$ أساس لنواته .

التمرين 08: ليكن التطبيقات الخطية التالية : $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرفة بواسطة : $h(x,y)=(y,x)$, $g(x,y,z)=(x-z,y)$, $f(x,y,z)=(2x,y+z)$.

1) أوجد $(f+g)(v)$ و $(3f)(v)$ حيث $v=(2,3,4)$.
2) أوجد $(2f-5g)(w)$ حيث $w=(5,1,3)$.

التمرين 09: ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف كما يلي :

$f(x,y,z)=(x+z,x-y,z+y,x+y+2z)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 10: ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي : $f(x,y)=(x+y,x-y,x+y)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 11: ليكن $B=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ و ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بواسطة :

$$f(e_1)=-2e_1+2e_3,\ f(e_2)=3e_2,\ f(e_3)=-4e_1+4e_3$$

1) عين أساس للنواة f, هل f متباين؟ هل يمكن أن يكون f غامر؟ لماذا؟

2) عين أساس للصورة f, ما هي رتبة f ؟

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

المقياس: رياضيات 02 — 2020/2019

الحل النموذجي للسلسلة رقم 02

التمرين 01:

تعريف: E , F فضاءان شعاعيان على الحقل $\mathbb{K}$ ، f تطبيق $f : E \longrightarrow F$

نقول أن f تطبيق خطي إذا وفقط إذا:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall X, Y \in E : f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

(1)

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

ليكن $X = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ ، $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_2, y_2, z_2))$$
$$= f((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2))$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \text{ ------ } (1)$$

نحسب

$$\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$$
$$= \alpha (x_1, y_1, 0) + \beta (x_2, y_2, 0)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \text{ ----- } (2)$$

من (1) و(2) نجد أن: $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

إذن f تطبيق خطي.

(2)

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+1, y+2)$$

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2))$$
$$= f((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2))$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2) \text{ .... } (1)$$

$$\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_2, y_2)$$
$$= \alpha(x_1+1, y_1+2) + \beta(x_2+1, y_2+2)$$
$$= (\alpha x_1 + \alpha + \beta x_2 + \beta, \alpha y_1 + 2\alpha + \beta y_2 + 2\beta) \text{ -- } (2)$$

من (1) و (2) نجد: $f(\alpha X + \beta Y) \neq \alpha f(X) + \beta f(Y)$

إذن: f ليس تطبيق خطي.

(3)

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = 2x - 3y + 4z$$

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $X = (x_1, y_1, z_1)$, $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2))$$
$$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$
$$= 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - 3\alpha y_1 - 3\beta y_2 + 4\alpha z_1 + 4\beta z_2 \text{ ---- } (1)$$

$$\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\alpha f(X)+\beta f(Y) = \alpha(2x_1-3y_1+4z_1)+\beta(2x_2-3y_2+4z_2)$$

$$= 2\alpha x_1-3\alpha y_1+4\alpha z_1+2\beta x_2-3\beta y_2+4\beta z_2 \quad \text{--- } (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$f(\alpha X+\beta Y) = \alpha f(X)+\beta f(Y)$$

اذن: f تطبيق خطي.

(4)

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, x)$$

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1)$ ، $Y=(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha X+\beta Y) = f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))$$

$$= f(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)$$

$$= (\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2, \alpha x_1+\beta x_2) \quad \text{------ } (1)$$

$$\alpha f(X)+\beta f(Y) = \alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$$

$$= \alpha(x_1+y_1, x_1)+\beta(x_2+y_2, x_2)$$

$$= (\alpha x_1+\alpha y_1+\beta x_2+\beta y_2, \alpha x_1+\beta x_2) \quad \text{---- } (2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$f(\alpha X+\beta Y) = \alpha f(X)+\beta f(Y)$$

اذن: f تطبيق خطي.

(5)

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+1, 2y, x+y)$$

ليس تطبيق خطي

(6) تطبيق خطي $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ، $f(x,y) = (2x-y, x)$

التمرين 02:

نظرية: E, F فضاءان على الحقل K

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$ أساس لـ E ، $y_1, \dots, y_n \in F$

يوجد تطبيق خطي وحيد $f : E \to F$ حيث

$$f(e_i) = y_i \qquad i = \overline{1, n}$$

1. إثبات وجود تطبيق خطي وحيد $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث

$$f(1,2) = (2,3) \quad , \quad f(0,1) = (1,4)$$

لدينا: $B = \{(1,2), (0,1)\}$

بما أن $\operatorname{card} B = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ يكفي دراسة الاستقلال الخطي للشعاعين

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(1,2) + \beta(0,1) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$(\alpha \, , \, 2\alpha + \beta) = (0,0)$$

ومنه:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن الشعاعان مستقلان خطيا

$B = \{(1,2), (0,1)\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^2$ حسب مبرهنة البعد

لدينا كذلك: $B' = \{(2,3), (1,4)\}$

بما أن $\operatorname{card} B' = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ يكفي دراسة الاستقلال الخطي للشعاعين

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(2,3) + \beta(1,4) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$(2\alpha + \beta \, , \, 3\alpha + 4\beta) = (0,0)$$

التمرين 02 :

نظرية : E , F فضاءين على الحقل $\mathbb{K}$

$B = \{e_1, ..., e_n\}$ أساس لـ E و $y_1, ..., y_n \in F$

يوجد تطبيق خطي وحيد $f : E \to F$ حيث :

$f(e_i) = y_i \quad , \quad i = \overline{1, n}$

1. إثبات وجود تطبيق خطي وحيد $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث

$f(1,2) = (2,3) \quad , \quad f(0,1) = (1,4)$

لدينا : $B = \{(1,2), (0,1)\}$

بما أن $card\, B = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ يكفي دراسة الإستقلال الخطي للشعاعين :

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha(1,2) + \beta(0,1) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$(\alpha, 2\alpha + \beta) = (0,0)$

ومنه :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 .$$

إذن الشعاعان مستقلان خطيا.

$B = \{(1,2), (0,1)\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^2$ مجموعة البدء

لدينا كذلك : $B' = \{(2,3), (1,4)\}$

بما أن $card\, B' = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ يكفي دراسة الإستقلال الخطي للشعاعين :

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha(2,3) + \beta(1,4) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$(2\alpha + \beta, 3\alpha + 4\beta) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 & \text{—— (1)} \\ 3\alpha + 4\beta = 0 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

من (1) $\beta = -2\alpha$

بالتعويض في (2) $3\alpha - 8\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

ومنه $\beta = 0$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا.

إذن: $B' = \{(2,3),(1,4)\}$ تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^2$ مجموع الحصول

"صورة الأساس B لمجموعة البدء $\mathbb{R}^2$ هو أساس B' لمجموعة الوصول $\mathbb{R}^2$"

حسب النظرية يوجد تطبيق خطي وحيد f:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

2- إيجاد صيغة f:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

حيث $f(1,2) = (2,3)$ و $f(0,1) = (1,4)$

بما أن f تطبيق خطي فإن:

$$f(x,y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y \,,\, \alpha_2 x + \beta_2 y)$$

لدينا: $f(1,2) = (\alpha_1 + 2\beta_1 \,,\, \alpha_2 + 2\beta_2) = (2,3)$

ومنه:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\beta_1 = 2 & \text{—— (1)} \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = 3 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

وكذلك $f(0,1) = (\beta_1, \beta_2) = (1,4)$

ومنه

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 & \text{—— (3)} \\ \beta_2 = 4 & \text{—— (4)} \end{cases}$$

من المعادلات السابقة نجد:

$\beta_1 = 1 \,,\, \beta_2 = 4 \,,\, \alpha_1 = 0 \,,\, \alpha_2 = -5$

إذن:

$$\boxed{f(x,y) = (y \,,\, -5x + 4y)}$$

تـ ع: $f(5,6) = (6 \,,\, -5\times 5 + 4\times 6) = (6 \,,\, -25+24) = (6,-1)$

1. ايجاد $f^{-1}(-2,7)$: نبحث عن (x,y) حيث

$f(x,y) = (-2,7)$

ومنه :

$(y, -5x+4y) = (-2,7)$

$$\begin{cases} y = -2 & \text{—— } (1) \\ -5x+4y = 7 & \text{—— } (2) \end{cases}$$

بالتعويض في (2) (1)

$-5x + 4(-2) = 7 \Rightarrow -5x - 8 = 7$

$\Rightarrow -5x = 15$

$\Rightarrow x = \frac{15}{-5} = -3$

اذن :

$f^{-1}(-2,7) = (-3,-2)$

التمرين 04 : $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ت.خ

$(x,y,s,t) \longmapsto f(x,y,s,t) = (x-y+s+t, x+2s-t, x+y+3s-3t)$

ت.خ $f : E \longrightarrow F$

$\text{Ker} f = \{X \in E \,/\, f(X) = 0_F\} \subset E$

$\text{Im} f = \{Y \in F, \exists X \in E : Y = f(X)\} \subset F$

1- أساس (قاعدة) الصورة $(\text{Im} f)$

$\text{Im} f = \{(x',y',s') \in \mathbb{R}^3 \, \exists (x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : (x',y',s') = f(x,y,s,t)\}$

$= \{(x-y+s+t, x+2s-t, x+y+3s-3t), (x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4\}$

$= \{x(1,1,1) + y(-1,0,1) + s(1,2,3) + t(1,-1,-3) \,/\, (x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4\}$

الاشعة $\{(1,1,1), (-1,0,1), (1,2,3), (1,-1,-3)\}$ تولد ف.ش.ج $\text{Im} f$

• دراسة الاستقلال الخطي للأشعة

ليكن $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3)+\lambda(1,-1,-3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\alpha-\beta+\gamma+\lambda, \alpha+2\gamma-\lambda, \alpha+\beta+3\gamma-3\lambda) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma+\lambda = 0 \\ \alpha+2\gamma-\lambda = 0 \\ \alpha+\beta+3\gamma-3\lambda = 0 \end{cases}$$

• عند حل جملة المعادلات نجد ما لانهاية من الحلول مما يؤدي إلى كون الأشعة مرتبطة خطيا.

• نختار عشوائيا ثلاث أشعة

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3)\}$$

دراسة الاستقلال الخطي:

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\alpha-\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \alpha+\beta+3\gamma) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+2\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+3\gamma = 0 \end{cases}$$

• عند حل جملة المعادلات نجد ما لانهاية من الحلول مما يؤدي إلى كون الأشعة مرتبطة خطيا.

• نختار عشوائيا شعاعين.

$$\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$$

دراسة الاستقلال الخطي.

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

دراسة الاستقلال الخطي للأشعة

ليكن $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3)+\lambda(1,-1,-3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\alpha-\beta+\gamma+\lambda, \alpha+2\gamma-\lambda, \alpha+\beta+3\gamma-3\lambda)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma+\lambda=0 \\ \alpha+2\gamma-\lambda=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma-3\lambda=0 \end{cases}$$

- عند حل جملة المعادلات نجد ما لا نهاية من الحلول مما يؤدي إلى كون الأشعة مرتبطة خطيا.
- نختار عشوائيا ثلاث أشعة

$$\{(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3)\}$$

ندرس الاستقلال الخطي:

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(1,2,3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\alpha-\beta+\gamma, \alpha+2\gamma, \alpha+\beta+3\gamma)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\gamma=0 \\ \alpha+\beta+3\gamma=0 \end{cases}$$

- بعد حل جملة المعادلات نجد ما لا نهاية من الحلول مما يؤدي إلى كون الأشعة مرتبطة خطيا.
- نختار عشوائيا شعاعين.

$$\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$$

ندرس الاستقلال الخطي.

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)=(0,0,0)$$

$$(\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta \\ \alpha=0 \\ \alpha=-\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا $\boxed{\dim Im f = 2}$

إذن يشكلان أساس لـ $Im f$.

2 - إيجاد أساس النواة ($\ker f$)

$$\ker f = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(x,y,s,t) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$= \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, (x-y+s+t,\ x+2s-t,\ x+y+3s-3t) = (0,0,0)\}$$

لدينا

$$\begin{cases} x-y+s+t=0 & \text{(1)} \\ x+2s-t=0 & \text{(2)} \\ x+y+3s-3t=0 & \text{(3)} \end{cases}$$

من (2) $\boxed{t = x+2s}$

نعوض في (1)

$$x-y+s+x+2s=0$$

$$\Rightarrow 2x+3s-y=0 \Longrightarrow \boxed{y = 2x+3s}$$

$$\ker f = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : t = x+2s \text{ و } y = 2x+3s\}$$

$$= \{(x,y,s,t) = (x,\ 2x+3s,\ s,\ x+2s)\}$$

$$= \{(x,y,s,t) = x(1,2,0,1) + s(0,3,1,2)\}$$

الشعاعان $\{(1,2,0,1),(0,3,1,2)\}$ يولدان ف.ش.ج $\ker f$

دراسة الاستقلال الخطي

ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,2,0,1) + \beta(0,3,1,2) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$(\alpha,\ 2\alpha+3\beta,\ \beta,\ \alpha+2\beta) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+3\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

الشعاعان $\{(1,2,0,1),(0,3,1,2)\}$ مستقلان خطيا

إذن يشكلان أساس لـ $\ker f$. $\boxed{\dim \ker f = 2}$

التمرين 05:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$$

1 _ ايجاد أساس للصورة $Im f$

$$Im f = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^2,\ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = f(x,y,z)\}$$
$$= \{(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \{x(1,0,1) + y(2,1,1) + z(-1,1,-2) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

الأشعة $\{(1,0,1),(2,1,1),(-1,1,-2)\}$ تولد $Im f$

دراسة الاستقلال الخطي لهذه الأشعة :

ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,0,1) + \beta(2,1,1) + \gamma(-1,1,-2) = (0,0,0)$$

$$(\alpha+2\beta-\gamma,\ \beta+\gamma,\ \alpha+\beta-2\gamma) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma = 0 & \text{......} (1) \\ \beta+\gamma = 0 & \text{......} (2) \\ \alpha+\beta-2\gamma = 0 & \text{......} (3) \end{cases}$$

من (2) نجد $\boxed{\beta = -\gamma}$

نعوض في (1)

$$\alpha - 2\gamma - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha - 3\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 3\gamma}$$

نلاحظ أن هناك مالانهاية من الحلول وبالتالي الأشعة مرتبطة خطيا.

نختار شعاعين عشوائيا $\{(1,0,1),(2,1,1)\}$

ندرس الاستقلال الخطي

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,0,1) + \beta(2,1,1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha+2\beta , \beta , \alpha+\beta) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=-\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

ومنه الشعاعان مستقلان خطيا فهما يشكلان
أساس لـ Imf

إذن أساس Imf هو $\{(1,0,1),(2,1,1)\}$

2- إيجاد أساس لـ النواة $(Kerf)$

$$Kerf = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x+2y-z , y+z , x+y-2z)=(0,0,0)\}$$

لدينا :

$$\begin{cases} x+2y-z=0 & \text{——— } 1 \\ y+z=0 & \text{——— } 2 \\ x+y-2z=0 & \text{——— } 3 \end{cases}$$

من 1 نجد :

$$\boxed{z=x+2y}$$

نعوض z في 2 :

$$y+x+2y=0 \Rightarrow x+3y=0 \Rightarrow \boxed{x=-3y}$$

ومنه :

$$z=-3y+2y=-y$$

$$Kerf=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-3y , z=-y\}$$

$$=\{(-3y,y,-y) / y\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{y(-3,1,-1) / y\in\mathbb{R}\}$$

الشعاع $(-3,1,-1)$ يولد فضاء جزئي $Kerf$ وهو مستقل خطيا إذن
يشكل أساس لـ $Kerf$

التمرين 08:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (2x, y+z)$, $g(x,y,z) = (x-z, y)$

1-

- $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$

$= f(2,3,4) + g(2,3,4)$

$= (4,7) + (-2,3) = (2,10)$

- $(3f)(v) = 3f(v) = 3(2,3,4) = 3(4,7) = (12,21)$

- $(2f-5g)(w) = 2f(w) - 5g(w) = 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)$

$= 2(10,4) - 5(2,1)$

$= (20,8) - (10,5)$

$= (10,3)$

التمرين 09: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ت، خ

$f(x,y,z) = (x+z, x-y, z+y, x+y+2z)$

1- تعيين نواة f $(\ker f)$:

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x+z, x-y, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)\}$

لدينا:

$$\begin{cases} x+z=0 & \text{—①} \\ x-y=0 & \text{—②} \\ z+y=0 & \text{—③} \\ x+y+2z=0 & \text{—④} \end{cases}$$

-11-

من ① $x = -z$

نعوض في ② و ③ $y = x = -z$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$$
$$= \{(-z,-z,z) = z(-1,-1,1),\ z \in \mathbb{R}\}$$

ومنه $\ker f = \{z(-1,-1,1),\ z \in \mathbb{R}\}$

إذن: f ليس متباين لأن $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$

- نعين صورة f $(\operatorname{Im} f)$

$$\operatorname{Im} f = \{(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4,\ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z',t') = f(x,y,z)\}$$

$$= \{(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4,\ \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z',t') = (x+z,\ x-y,\ z+y,\ x+y+2z)\}$$

$$= \{x(1,1,0,1) + y(0,-1,1,1) + z(1,0,1,2) \ /\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

الأشعة $\{(1,1,0,1),(0,-1,1,1),(1,0,1,2)\}$ تولد شعاعيا $\operatorname{Im} f$

ندرس الاستقلال الخطي لهذه الأشعة

ليكن $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) + \gamma(1,0,1,2) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$(\alpha+\gamma,\ \alpha-\beta,\ \alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta+2\gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 0 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات يعطي مالا نهاية من الحلول مما يؤدي إلى كون الأشعة مرتبطة خطيا

نأخذ شعاعين عشوائيا $\{(1,1,0,1), (0,-1,1,1)\}$

ندرس الاستقلال الخطي:

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) = 0_{\mathbb{R}^4}$$
$$(\alpha, \alpha-\beta, \beta, \alpha+\beta) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

ومنه الشعاعين مستقلين خطيا

$$\mathrm{Im} f = \{(1,1,0,1), (0,-1,1,1)\}$$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$.

بما أن $\dim \mathrm{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$

فإن f ليس غامر

التمرين 10:

نفس نفس الخطوات

التمرين 11:

$$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و f تطبيق خطي معرف:

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3$$

$$f(e_2) = 3e_2$$

$$f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1- تعيين أساس لنواة f $(\ker f)$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

أولا نبحث عن صيغة f

بما أن B أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$ فإن:

$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \quad f \text{ ت.خ}$$

$$= x(-2e_1 + 2e_3) + y(3e_2) + z(-4e_1 + 4e_3)$$

$$= -2xe_1 + 2xe_3 + 3ye_2 - 4ze_1 + 4ze_3$$

$$= (-2x - 4z)e_1 + 3ye_2 + (2x + 4z)e_3$$

$$= (-2x-4z, 0, 0) + (0, 3y, 0) + (0, 0, 2x+4z)$$

$$= (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$$

$$f(x,y,z) = (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (-2x-4z, 3y, 2x+4z) = (0,0,0)\}$$

لدينا

$$\begin{cases} -2x-4z=0 \\ 3y=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-2z,0,z) = z(-2,0,1)\}$$

الشعاع $\{(-2,0,1)\}$ مولد ف.ش.ع $\ker f$ وهو مستقل خطيا

اذن يشكل أساس لـ $\ker f$: $(\dim \ker f = 1)$

- f ليس متباين لأن $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$

- لا يمكن أن يكون f غامر لأن :

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

ومما سبق فإن $\dim \ker f = 1$ ومنه $\dim \operatorname{Im} f = 2$

أي $2 = \dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$

مجموعة الوصول.

2 - تعيين أساس للصورة $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x',y',z') = f(x,y,z)\}$$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x',y',z') = (-2x-4z, 3y, 2x+4z)\}$$

$$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x',y',z') = 2x+4z\,(-1,0,1) + y\,(0,3,0),\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

الشعاعان $\{(-1,0,1),(0,3,0)\}$ يولدان من $\operatorname{Im} f$

ندرس الاستقلال الخطي:

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$،

$$\alpha(-1,0,1)+\beta(0,3,0)=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(-\alpha,3\beta,\alpha)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}-\alpha=0\\ 3\beta=0\\ \alpha=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

الشعاعان مستقلان خطيا.

إذن يشكلان أساس لـ $\operatorname{Im} f$ ، $\dim \operatorname{Im} f=2$

رتبة f:

$$\operatorname{rang} f=\dim \operatorname{Im} f=2.$$

ت خ $f:E\longrightarrow F$

f متباين $\Leftrightarrow$ $\ker f=\{0_E\}$

f غامر $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f=F$