10.1 Méthode des volumes finis

Toutes les équations de transport que nous avons dérivé dans la première partie de cet ouvrage peuvent s'écrire sous une forme générale qui est :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S} \qquad (10.1)$$

où S est un terme source et Γ est un coefficient de diffusion. Les quatre termes de cette équation sont, respectivement et de gauche à droite, le terme d'accumulation dans le volume de contrôle, le terme d'advection, le terme de diffusion et le terme source.

Commençons par traiter un cas simple de conduction de la chaleur stationnaire en 1-D avec une source volumique de chaleur. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

dans cet exemple. La FIG. 10.1 montre un point P entouré, à sa droite et à sa gauche, par les points E et W (pour east et west) respectivement. Dans cet exemple, nous admettons que la distance entre deux points successifs δx peut être variable. Sur la FIG.10.1, les distances entre W et P et entre P et E sont $(\delta x)_w$ et $(\delta x)_e$ respectivement. Le point P est au centre d'un volume de contrôle qui s'étend du point w au point e situés à mi-parcours entre les points P et W et entre les points P et E respectivement. *Les majuscules indiquent les centres des volumes de contrôle et les minuscules les faces entre deux volumes adjacents.*

Pour le volume de contrôle ainsi défini, l'équation de la conduction peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0$$

où le premier terme représente le flux de chaleur qui sort par la face e, le deuxième terme le flux de chaleur qui rentre par la face w et le troisième terme est la source de chaleur *moyenne* dans le volume de contrôle. Le bilan thermique

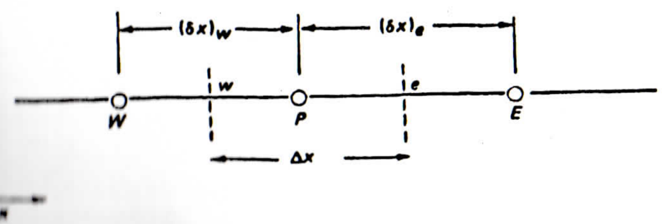

FIG. 10.1: Volumes de contrôle

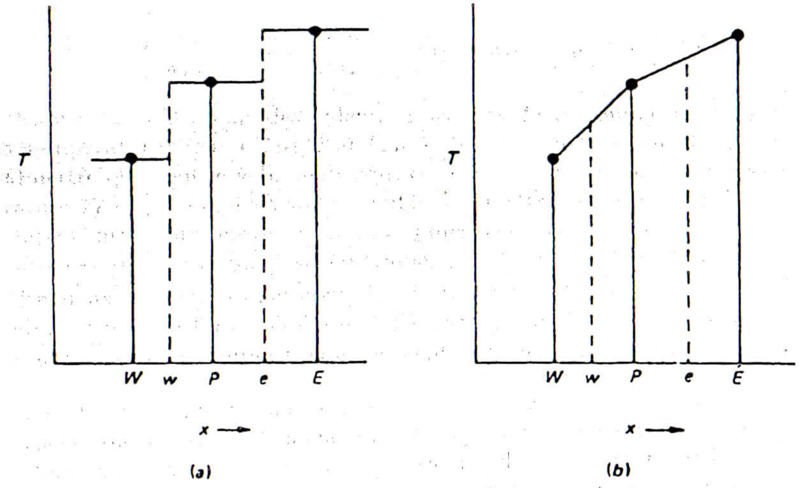

FIG. 10.2: Profils de température dans le volume de contrôle a) constant et b) linéaire

peut être remplacé par une expression algébrique qui est :

$$\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \overline{S}\Delta x = 0$$

où $\overline{S}$ est une moyenne du terme source dans le volume de contrôle. L'équation algébrique ci-dessus peut aussi s'écrire sous la forme :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \qquad (10.2)$$

où

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad b = \overline{S}\Delta x.$$

Ci-dessus, λ_e et λ_w sont des valeurs moyennes de la conductivité thermique aux températures $(T_E + T_P)/2$ et $(T_P + T_W)/2$, par exemple. Il est possible d'admettre que tout le volume de contrôle qui entoure le point P est à la température T_P où, sinon, il est aussi possible d'admettre une variation (linéaire par exemple) entre deux centres de deux volumes de contrôle adjacents. La FIG.10.2 montre ces deux possibilités schématiquement.

En deux ou trois dimensions, la discrétisation de l'équation de diffusion conduira vers une forme similaire à l'équation (10.2). Si N est le nombre de volumes voisins du volume de contrôle centré sur le point P, la discrétisation de