Université de Biskra
Département de Mathématiques
$2^{éme}$ Licence maths
Module : Algébre 4

Série 2

Exercice 1 : 1) Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur l'espace E indiqué.
(a) $b_1(u,v) = 2u_1v_1 - 4u_2v_2 + 3u_1v_2 (E = \mathbb{R}^2)$.
(b) $b_2(u,v) = u_1v_1 + 8u_2v_4 - 3u_2 (E = \mathbb{R}^4)$.
(c) $b_3(u,v) = 2u_1v_1 + 3u_1v_2 + 6u_2v_2 + 3u_2v_1 (E = \mathbb{R}^2)$.
(d) $b_4(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 (E = \mathbb{R}^3)$.
(e) $b_5(u,v) = u_1u_2 - 8v_1u_2 (E = \mathbb{R}^2)$.
(f) $b_6(u,v) = 0 (E = \mathbb{R}^2)$.
(g) $b_7(u,v) = 3 (E = \mathbb{R}^2)$.
2) Ecrire la matrice de chacune des formes bilinéaires.
3) Quelles formes bilinéaires sont symétriques ?
4) Calculer $b_1(u,v)$ pour $u = (2,3)$ et $v = (4,-1)$ de deux façons :
(a) en utilisant l'expression de b_1.
(b) avec des produits matriciels.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.
1) Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2) Déterminer la matrice B représentant b dans $\mathcal{B}_0$.
3) b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Déterminer la partie symétrique, b_1, et la partie antisymétrique, b_2, de b.
4) Déterminer le rang de b.

Exercice 3 : Soit b la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1) b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Quel est son rang ?
2) Pour tout $(u,v) \in E^2$, déterminer $b(u,v)$.
3) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ est une base de E.
4) Déterminer de deux manières la matrice B' représentant b dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4 : Dans $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices réelles d'ordre 2, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $b(A,B) = tr(A^t.B)$ où $tr(M)$ désigne la trace de la matrice M.
1) Prouver que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2) Prouver que pour tout A de E, $b(A,A) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si,

$A = O_2$.
3) Donner la matrice B représentant b dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de E.
4) En déduire le rang de b.
Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension 2 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit f une forme bilinéaire sur E.
1) Pour x un élément de E on note f_x l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout élément y de E par $f_x(y) = f(x, y)$. Montrer la propriété suivante : $\forall c \in E, \ker f_x \neq \{0\}$.
2) On suppose que f vérifie la propriété suivante : $\forall (x, y) \in E \times E, (f(x, y) = 0 \Rightarrow f(y, x) = 0)$.
Montrer que la forme bilinéaire f est soit symétrique soit antisymétrique.
Définition : Soit E un espace vectoriel réel.
On appelle produit scalaire sur E toute application ϕ définie sur $E \times E$ à valeurs réelles telle que :
1) Pour tout $(x, y) \in E \times E$, l'application $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ est bilinéaire.
2) Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ (symétrie).
3) Pour tout $x \in E$, $\phi(x, x) \geq 0$ (positivité).
4) Si $x \in E$ vérifie $\phi(x, x) = 0$, alors $x = 0$ (définie).
Le produit scalaire $\phi(., .)$ est noté en général $\langle ., . \rangle$.
Exercice 6 : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]), \mathbb{R})/f(0) = f(1) = 0\}$. Pour f et g dans E, on pose : $\phi(f, g) = -\int_0^1 (f(x)g''(x) + f''(x)g(x))dx$.
Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E. **Exercice 1 :** On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ la base duale de la base canonique de E. On note v et w les éléments de $E^\star$ définis par $v(P) = P(1)$ et $w(P) = \int_0^1 P(t)dt$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, v, w)$ est une base de $E^\star$.
b) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
c) Donner la base biduale de $\mathcal{B}'$.