Université Med Khider Biskra

Faculté des sciences exactes de sciences de la nature et de la vie
Départements de Mathématiques

ANNEE: 2020/2021

1^{er} ANNEE MI

Module **Analyse 2**

SOLUTION: SN° 02

EXERCICE 01.

1) Montrer que la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

2) En utilisant les sommes de Riemann calculer les intégrales :

$$I=\int_{-2}^{1}(-5x+3)\,dx \quad \text{et} \quad J=\int_{-x}^{x}e^{5t}dt.$$

3) Si f est une fonction croissante, démontrer qu'elle est intégrable au sens de $\mathbb{R}$.

SOLUTION 01.

a) La fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Pour toute subdivision $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,1\right\}$ de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}S_f(P) &= \sum_{k=1}^{n}\sup_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}f(x)\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}1\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{n}{n}=1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}s_f(P) &= \sum_{k=1}^{n}\inf_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{1k}{n}\right]}f(x)\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}0\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

on trouve : $\inf S_f(P)\neq\sup s_f(P)$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

b) On a

$$(\forall P : \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{(b-a)}{n}))$$

1. $I = \int_{-2}^{1} (-5x+3)\, dx$, $[a,b] = [-2,1]$, $f(x) = -5x+3$.

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(-2)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2+k\frac{(1-(-2))}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(-2+\frac{3k}{n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[-5\left(-2+\frac{3k}{n}\right)+3\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{-45}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} 13\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{45}{n^2} \frac{n}{2} (1+n) + \frac{39}{n}.n\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{45}{2n} (1+n) + 39\right] = \frac{45}{2} + 39 \end{aligned}$$

donc :

$$I = \int_{-2}^{1} (-5x+3)\, dx = \frac{123}{2}.$$

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2x}{n} \sum_{k=1}^{n} f(-x+\frac{2x}{n}k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2x}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-5x+\frac{10x}{n}k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2xe^{-5x}}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{10x|n}\right)^k \end{aligned}$$

Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique, donc

$$\begin{aligned} \frac{2x}{n} e^{-5x} \sum_{k=1}^{n} \left(e\,\frac{10x}{n}\right)^k &= \frac{2x}{n} e^{-5x} \left[\frac{1-\left(e^{10x|n}\right)^n}{1-e^{10x|n}}\right] = \frac{2xe^{-5x}}{n}.\frac{1-e^{10x}}{1-e^{10x|n}} \\ &= e^{-5x}\left(1-e^{10x}\right).\frac{\frac{2x}{n}}{1-e^{10x|n}} \end{aligned}$$

donc :

$$\int_{-x}^{+x} e^{5t}dt = e^{-5x}\left(1-e^{10x}\right) \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2x}{n}}{1-e^{10x|n}} = \frac{e^{-5x}}{5}\left(e^{10x}-1\right) \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2x}{n}}{1-e^{10x|n}} = -\frac{1}{5} \text{ (On pose : } u = \frac{10x}{n})$$

3) Il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une subdivision de $[a,b]$, telle que : $S(\sigma_n) - s(\sigma_n) < \varepsilon$.

On a f croissante sur $[a,b]$, on a : $m_i = f(x_{i-1}) = \inf\limits_{]x_{i-1},x_i[} f$ et $M_i = f(x_i) = \sup\limits_{]x_{i-1},x_i[} f$ $(i = 1, 2, .., n)$, d'où :

$$\begin{aligned} S(\sigma_n) - s(\sigma_n) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a,b]$ satisfait $S(\sigma_n) - s(\sigma_n) < \varepsilon$.

EXERCICE02. Calculer les intégrales suivantees :

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, posont $x = \sin t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$, posont $x = \sin t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, puis $y = \tan \frac{t}{2}$

3) $\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$, posont $y^2 = \frac{x+1}{x+2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{2y^2-1}{1-y^2}$.

SOLUTION.

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, on pose $x = \sin t$ et $0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t\ dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt, \text{ car } 0 < t < \tfrac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} \sin 2\tfrac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}}$, on pose $x = \sin t$ et $0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t\ dt$ (

$$\sin t = \frac{2y}{1+y^2},\ dt = \frac{2dy}{1+y^2} \text{ et } y = \tan\frac{t}{2}, t = 0, t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 \text{ et } y = 1.$$

on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{(2+\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{(2+\sin t)\sqrt{\cos^2 t}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{(2+\sin t)\cos t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2+\sin t)}$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dy}{1+y^2}}{(2+\frac{2y}{1+y^2})} = \int_0^1 \frac{\frac{2dy}{1+y^2}}{(\frac{2+2y^2+2y}{1+y^2})}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dy}{2+2y^2+2y} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+y+1}$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{(y+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\tfrac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{3}{\sqrt{3}}\right) - \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

où

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

3) $\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$, on pose $y^2 = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{2y^2-1}{1-y^2} \Rightarrow dx = \frac{4y(1-y^2)+4y^2-2y}{(1-y^2)^2}dy = \frac{2y}{(1-y^2)^2}dy$, $x=0$, $x=1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ donc :

$$\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \frac{2y}{(1-y^2)^2} \arctan(y)\, dy$$

Par intégration par parties :

$$u = \arctan(y) \quad \rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+y^2}$$
$$v' = \frac{2y}{(1-y^2)^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{1-y^2}$$

donc :

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \frac{2y}{(1-y)^2} \arctan(y)\, dy$$

$$= \left[\left(\frac{2y^2-1}{1-y^2}\right)\arctan(y)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \frac{1}{(1+y^2)(1-y^2)} dy$$

$$= \left[\left(\frac{2y^2-1}{1-y^2}\right)\arctan(y)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{a}{1-y} + \frac{b}{1+y} + \frac{cy+d}{1+y^2}\right) dy$$

EXERCICE03:

1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^{5t}}{3t} dt,\ \ g(x) = \int_{-2x}^{x^2} \ln\left(t^2+1\right) dt.$$

2 Transformer les intégrales suivantes aux intégrales définies entre 0 et 1:

$$\int_{-1}^{3} \left(3x^2+2x-1\right) dx \text{ et } \int_{-1}^{1} x^2 e^{2x} dx.$$

SOLUTION.

1 Soit H la primitive de h $(H' = h)$, donc

$$f(x) = \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} h(t)\, dt = H(\Psi(x)) - H(\Phi(x))$$

et

$$f'(x) = H'(\Psi(x))\,\Psi'(x) - H'(\Phi(x))\,\Phi'(x)$$

Pour $\int_{-x}^{x} \frac{e^{5t}}{3t} dt$, on a

$$f'(x) = \frac{e^{5x}}{3x}.1 - \frac{e^{-5x}}{3(-x)}.(-1) = \frac{e^{5x}}{3x} - \frac{e^{-5x}}{3x}.$$

Pour $\int_{-2x}^{x^2} \ln\left(t^2+1\right) dt$, on a

$$g'(x) = \left[\left(\ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right)+1\right)\right] 2x - \left[\left(\ln\left((-2x)^2+1\right)\right)\right](-2)$$

2 On utilise le changement de variable $x = a + (b-a)t$, donc

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\, dt$$

Ceci implique que

$$\int_{-1}^{3} \left(2x^2+x-2\right) dx = (3-(-1))\int_0^1 \left[2(-1+2t)^2 + (-1+2t) - 2\right] dt$$

et

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{2x} dx = (1-(-1))\int_0^1 \left[(-1+2t)^2 e^{2(-1+2t)}\right] dt$$

EXERCICE04: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

SOLUTION. Par intégration par parties, on a

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt$$

On a

$$\frac{f(a)}{n}\cos(na) \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(b)}{n}\cos(nb) \to 0$$

et

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$$

EXERCICE05. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

2. Si $x > 0$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

SOLUTION.

1. Pour $x > 0$ on a $\dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$, donc

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

on trouve

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^n\frac{1+x}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

2. Soit $S_n = (I_0+I_1) - (I_1+I_2) + (I_2+I_3) - ... \pm (I_{n-1}+I_n) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... \pm \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

Mais d'autre part cette somme étant télescopique nous avons $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de S_n et donc de

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\to} I_0 \text{ car } I_n \to 0$$