Université de Biskra
Département d'informatique

Niveau : M1(IA)

Matière : MPES
Chragé de matière : L. Kahloul
TD2 : Loi Géométrique ; Variable continue, Loi Exponentielle

Exercice 1. *Espérance(Loi Géométrique). .*

- Prouver que l'espérance de la loi géométrique $P_X(k) = pq^{k-1}$ est donnée par : $\frac{1}{p}$.

Remarque :
On vous propose d'exploiter l'idée que la somme : $\Sigma_{i=1}^{\propto} np^{n-1}$ n'est que la dérivée de la somme $\Sigma_{i=0}^{\propto} p^n$.

Exercice 2. *Trouver la bonne Clé (Loi Géométrique). .*
Un homme ivre rentre chez lui avec 10 clés différentes dans sa poche. Pour ouvrir la porte, il essaie une clé au hasard et, si la porte ne s'ouvre pas, il remet la clé dans sa poche et recommence. On définit X comme le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre.

- Donner la définition extensive de l'ensemble Ω_0 : résultats de l'expérience aléatoire effectuée à chaque fois par l'homme ; Il s'agit de qu'elle genre d'expérience célèbre dans ce cas ?
- Donner une définition intensive de l'ensemble Ω_1 : résultats de l'expérience aléatoire menant à trouver la bonne clé.
- C'est quoi la relation entre Ω_1 et la variable aléatoire X ?
- Identifier la loi de probabilité $P_X(k)$.

Exercice 3. *Tirage de carte : (Loi Géométrique). .*

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n. Soit Z le nombre de tirages effectués.

- Reconnaître quelle est la loi de Z.
- Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à r, pour $r \geq 1$.
- Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50 ?

Remarque :
1) Pour résoudre la question 3, vous aurez besoin de la somme des termes d'une suite géométrique donnée par : $\Sigma_{k=0}^{n} U_n = U_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, où r est la raison de la suite.
2)Application Numérique : n = 100.

solution pour 3 : $P(Z <= 50) = 1 - P(Z > 50) = 1 - (\Sigma_{k=51}^{\propto} p \times q^{k-1})$. On prend $r = k - 51$, donc pour $k = 51$ on a $r = 0$; $(\Sigma_{k=51}^{\propto} p \times q^{k-1}) = (\Sigma_{r=0}^{\propto} p \times q^{r+50}) = p \times q^{50} \times (\Sigma_{r=0}^{\propto} q^r)$. Ici on applique la somme d'une suite géométrique de $U_0 = 1$ et de $raison = q$. On obtient : $p \times q^{50} \times (\Sigma_{r=0}^{\propto} q^r) = p \times q^{50} \times 1 \times \frac{1-q^{\propto}}{1-q} = p \times q^{50} \times (\frac{1}{1-q}) = q^{50}$. D'où : $P(Z <= 50) = 1 - P(Z > 50) = 1 - q^{50}$

Exercice 4. *Densité de variable continue. .*

1. Soit X la variable aléatoire réelle de densité de probabilité
   $f(x) = kx$ si $0 \leq x \leq 5$

   0 sinon.
   - Calculez k, pour que f soit une densité.
   - Calculez : $P(1 \leq X \leq 3), P(2 \leq X \leq 4) et P(X \leq 3)$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \lambda e^{-2|t|}$. $t \in R$, où λ est un réel.
   - Quelle est la valeur de λ ?
   - Quelle est la densité de probabilité de $Y = X^2$? N.B. vous pouvez vérifiez votre résultat calculé par la règle ($Y = X^2, g_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x}))$.
   - Calculez $E(X), Var(X), E(Y), Var(Y)$.

Exercice 5. *Espérance de la loi Exponentielle. .*
X suit $\xi(\theta)$ ssi sa fonction de densité est donnée par :
$f_X(t) = \theta e^{-\theta t}$ si $t \in R^+$
0 sinon

- Prouver que $E(X) = \frac{1}{\theta}$. Penser à utiliser l'intégration par parties : $\int_a^b f' g dx = [fg]_a^b - \int_a^b f g' dx$