Université de Biskra
Département d'informatique

Niveau : M1(IA)

Matière : MPES
Chargé de matière : L. Kahloul
TD2.1 : Loi Uniforme, Loi Exponentielle

Exercice 1. *Révision Simple. .*
Soit X une v.a.c. Rapellons que $F_X([a,b]) = P(a <= X <= b) = \int_a^b f_X(x)dx$

1. Prouver que $P_X(x) = 0$. {**Solution** :$P_X(x) = P(X = x) = P(X \in \{x\}) = \int_x^x f_X(x) = 0$}
2. Déduire que $P(X <= x) = P(X < x)$. {**Solution** :$P(X <= x) = P(X < x) + P(X = x) = P(X < x)$}
3. Déduire $P(a < X < b)$. {**Solution** :$P(a < X < b) = P(a <= X <= b)$}

Exercice 2. *(A) Loi uniforme continue & Simulation de variables aléatoires continues. .*

Une variable aléatoire uniforme continue X sur une intervalle $[a,b]$ est une variable notée $X \sim U([a,b])$ et sa fonction de densité est donnée part :

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad t \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Partie (1) :

1. Calculer la fonction de répartition $F_X(t)$. Rappelons que la fonction de répartition $F_X(x) = P(X <= x)$ est une fonction croissante avec des valeurs dans l'intervalle [0,1], $lim\ F_X(x)_{x \to +\infty} = 1$ et $lim F_X(x)_{x \to -\infty} = 0$;
2. Déduire $F_{X_s}(x)$ pour $X_s \sim U([0,1])$; X_s est dit suivant Uniforme Standard.
3. Prouver que $u = 1 - X_s$ suit une loi uniforme standard ;
4. Soit X une v.a.c et $F_X(x)$ sa fonction de répartition (croissante et admettant une fonction réciproque $F_X^{-1}(U)$, pour $U \in [0,1]$. Prouver que la variable $Y = F_X^{-1}(U)$ tel que $U \sim U([0,1])$ est une variable ayant la même fonction de répartition que X. Déduire une méthode pour simuler la variable aléatoire X.

Partie (2) : Application de la question 4 de la partie 1.

Soit $X \sim \xi(\theta)$ tel que sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(t) = \begin{cases} \theta e^{-\theta t} & si \quad t \in R^+ \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition de $F_X(x)$ de la variable X ;
2. Déduire l'algorithme permettant de simuler X ; (**à appliquer dans la séance de TP**)

Exercice 3. *Simulation de la variable aléatoire de Poisson. .*

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n va.a.c exponentielles indépendante mutuellement et du même paramètre θ. Il est prouvé que la variable $T_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi dite Gamma (ou loi d'Erlang) ayant deux paramètres (θ, n) où $n \geq 1$ et sa fonction de densité est donnée par : $f_{T_n}(t) = \dfrac{(\theta t)^{n-1}}{(n-1)!}\theta e^{-\theta t}$.

1. Soit $t >= 0$ un nombre réel (en effet c'est une valeur "temps" et [0,t] va représenter un intervalle de temps). On définit la variable aléatoire N_t comme le compteur de variables X_i inclues dans la somme T_n tel-que : $T_n <= t$. formellement, $N_t = \Sigma_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n <= t\}}$.
   Question : Prouver que N_t suit une loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Pour faire cette preuve, on utilise les deux propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $t \geq 0$ L'événement $\{N_t >= n\}$ est égale à l'événement $\{T_n <= t\}$
   (b) $P(N_t = n) = P(N_t >= n) - P(N_t >= n+1)$. Ceci se justifie par le fait : $\{N_t = n\} = \{N_t >= n\} \setminus \{N_t >= n+1\}$
2. Déduire N_t pour $t = 1$ et donc déduire un algorithme permettant de simuler une variable de Poisson de paramètre λ donné. Il est claire qu'on doit utiliser la même idée déjà énoncé dans l'exercice précédent. (**à appliquer dans la séance de TP**).

1 Corrigé type :

Exo. [(**A**)]

1) Calculer la fonction de répartition $F_X(t)$.

$F_X(t) = \int_a^t f(x)dx = \int_a^t (\frac{1}{b-a})dx = \int_a^t (\frac{1}{b-a})dx = [\frac{x}{b-a}]_a^t = \frac{x-a}{b-a}$