Réseaux de Petri Colorés

Hammadi Bennoui

Computer Science Department,
University of Biskra

December, 2013

Outline

1. Motivation
2. Introduction
3. Représentation graphique
4. Dynamique
5. Modélisation

Motivation

- Le système modélisé comporte plusieurs parties identiques.
  $\Longrightarrow$ Répéter le même réseau de Petri autant de fois qu'il y'a de parties identiques dans le système.
  $\Longrightarrow$ La taille du modèle devient inexploitable.
- Dans un RdP l'information est apportée par la place. Si l'on désire enrichir l'information apportée par une place, *il faut être en mesure de distinguer deux marques entre elles au sein de la même place*.

Solution:

- Réseaux de Petri colorés: à chaque marque dans la place en associé un identificateur ou une *couleur*.

Motivation

- Le système modélisé comporte plusieurs parties identiques.
  $\Longrightarrow$ Répéter le même réseau de Petri autant de fois qu'il y'a de parties identiques dans le système.
  $\Longrightarrow$ La taille du modèle devient inexploitable.
- Dans un RdP l'information est apportée par la place. Si l'on désire enrichir l'information apportée par une place, *il faut être en mesure de distinguer deux marques entre elles au sein de la même place*.

Solution:

- Réseaux de Petri colorés: à chaque marque dans la place en associé un identificateur ou une *couleur*.

Motivation

- Le système modélisé comporte plusieurs parties identiques.
  $\Longrightarrow$ Répéter le même réseau de Petri autant de fois qu'il y'a de parties identiques dans le système.
  $\Longrightarrow$ La taille du modèle devient inexploitable.
- Dans un RdP l'information est apportée par la place. Si l'on désire enrichir l'information apportée par une place, *il faut être en mesure de distinguer deux marques entre elles au sein de la même place*.

Solution:

- Réseaux de Petri colorés: à chaque marque dans la place en associé un identificateur ou une *couleur*.

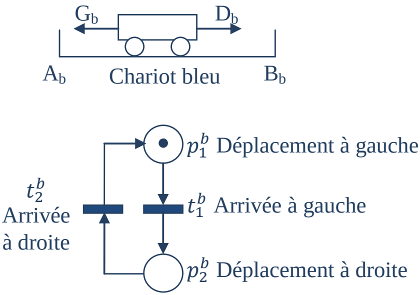
Motivation

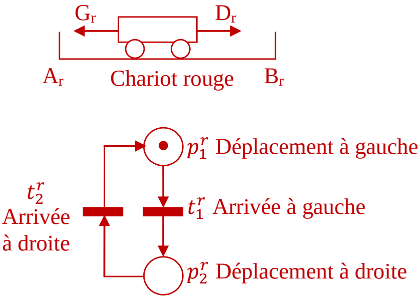
- Le système modélisé comporte plusieurs parties identiques.
  $\Longrightarrow$ Répéter le même réseau de Petri autant de fois qu'il y'a de parties identiques dans le système.
  $\Longrightarrow$ La taille du modèle devient inexploitable.
- Dans un RdP l'information est apportée par la place. Si l'on désire enrichir l'information apportée par une place, *il faut être en mesure de distinguer deux marques entre elles au sein de la même place*.

Solution:

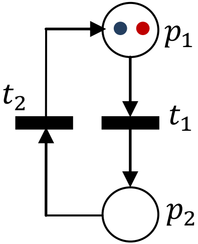
- Réseaux de Petri colorés: à chaque marque dans la place en associé un identificateur ou une *couleur*.

- Il existe plusieurs variantes de RdPs.
- Le modèle que nous allons examiner à été introduit par K. Jenson.
- Exemple

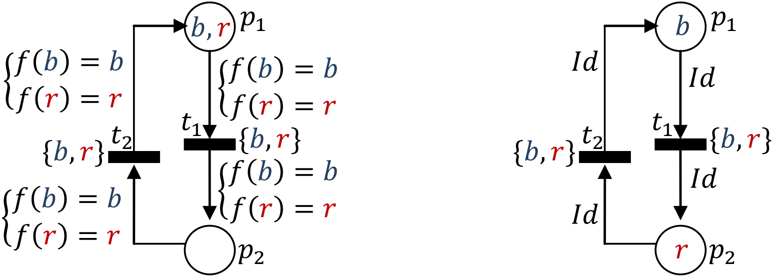




Deux RdPs identiques. On peut donc les fusionner.



Ceci n'est pas une fusion correcte.

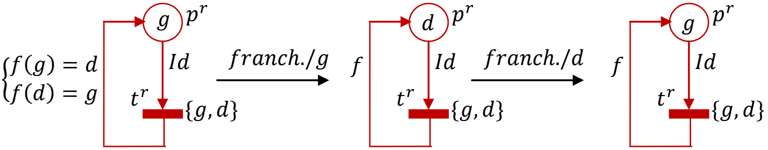


- Une fonction est associée à chaque arc pour traduire la relation qui existe entre la couleur associée à la transition et choisie pour franchir cette transition (couleur de franchissement) et la couleur associée à la place correspondante (couleur de marque).

- la fonction *Identité* indique qu'il n'y a pas de transformateur de couleur: le franchissement d'une certaine transition par rapport à une certaine couleur correspond simplement à retirer (et ajouter) une marque de même couleur de (dans) la place d'entrée (de sortie resp.).

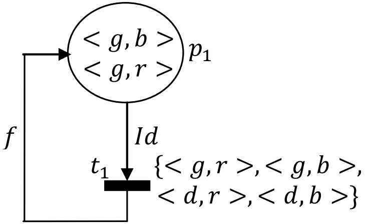
RQ: Généralement, on omet la fonction si c'est la fonction *Id*.

- Ex: autre fonction que *Id*.
  RdP coloré associé au chariot rouge : couleur/sens de déplacement.



- Ex: Couleur et fonctions dans le cas général.
  RdP coloré associé au fonctionnement des deux chariots: coloration totale.

$$f(<g,r>) = <d,r>$$
$$f(<d,r>) = <g,r>$$
$$f(<g,b>) = <d,b>$$
$$f(<d,b>) = <g,b>$$



- RQ:
  - Dans le cas de l'exemple présenté, on a vu qu'on peut construire un RdP coloré de plusieurs manières: coloration/deux chariots; coloration/sens de déplacement; coloration/deux à la fois.

- Dans le cas général, une couleur est remplacée par un n-uplet $c_k =< c_{k_1}, c_{k_2}, \cdots, c_{k_n} >$. Ceci est nécessaire lorsqu'une marque doit porter une information complexe. Par exemple, dans un système de production le triplet $< o, p, m >$ peut représenter les 3 éléments suivants: la nature d'un objet, sa position dans une file d'attente et la machine sur laquelle il doit passer.
- Les fonctions associées aux arcs peuvent être quelconques; en particulier, l'image d'une couleur simple peut être une combinaison linéaire de couleurs simples ou complexes.

- Le passage d'un RdP ordinaire à un RdP coloré correspond à une opération dite de "*pliage*". L'opération inverse correspond à un "*dépliage*". Dans l'exemple précédent, la figure relative à la coloration couleur/chariot et celle relative à couleur/chariot & sens de déplacement contiennent la même information.
- Dans certains cas où peut être amené à ne pas distinguer les marques entre elles, on utilise la couleur neutre $< \bullet >$

$$\begin{cases} f(<a>) = <\bullet> \\ f(<b>) = <\bullet> \end{cases}$$

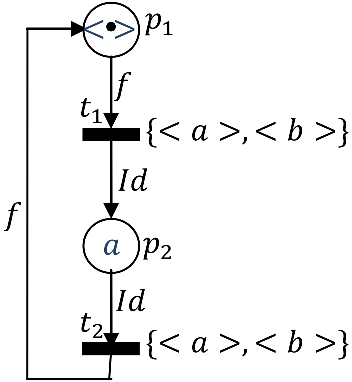


Figure: F

Fig. F représente le partage de deux ressources identiques entre deux consommateurs a et b (chacun des deux consommateurs peut utiliser les deux ressources.
Le marquage de F correspond au cas suivant: Une des ressources est disponible (marque de couleur neutre dans p_1) et l'autre est utilisée par le consommateur a (marque de couleur $< a >$ dans la place p_2).
F' est le réseau ordinaire correspondant à F.

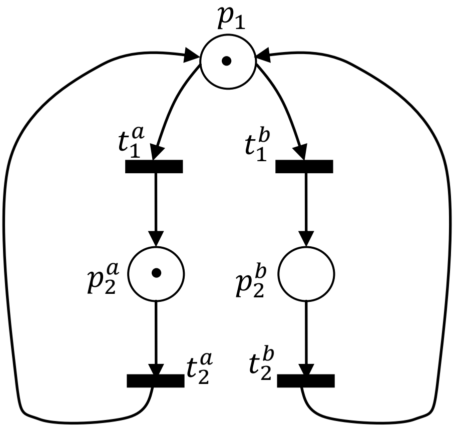


Figure: F'

$F \longrightarrow F'$: dépliage
$F' \longrightarrow F$: pliage

Définition

Un RdP Coloré est un sextuplet $R = (P, T, Pre, Post, \mu_0, C)$ où:

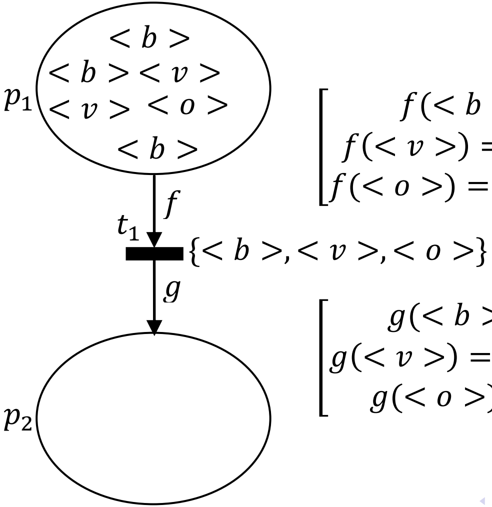
- P ensemble de places;
- T ensemble de transitions;
- $C = \{c_1, c_2, \cdots\}$ est l'ensemble de couleurs;
- Pre et $Post$ sont des fonctions relatives aux couleurs de franchissement;
- μ_0 le marquage initial.

RQ: Une couleur $c_k =< c_{k_1}, c_{k_2}, \cdots, c_{k_n} >$ pourra être notée soit globalement c_k, soit par le n-uplet qui la définit.

Représentation graphique I

- Places $\longrightarrow$ Cercles.
  Une place peut contenir des marques colorées; on peut trouver plusieurs marques de la même couleur dans une même place.
  Exemple:

Représentation graphique II



$$\left[\begin{array}{c} f(<b>) = <v> \\ f(<v>) = <b> + <v> \\ f(<o>) = <b> + 2<o> \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} g(<b>) = <b> \\ g(<v>) = <o> + <b> \\ g(<o>) = 2<o> \end{array}\right.$$

Évolution du marquage

Le marquage $\mu(p_i)$ représente le nombre de marques de chaque couleur contenues dans la place p_i.
Ex.: le marquage initial de la figure précédente est:
$\mu(p_1) = 3 < b > +2 < v > + < o >$
$\mu(p_2) = 0.$

Transition validée I

Soit $C(t_j)$ l'ensemble de couleurs associées à la transition t_j. Cette transition peut être franchie par rapport à l'une quelconque de ces couleurs (le nombre de couleurs dans $C(t_j)$ correspond au nombre de transitions du réseau déplié).
Soit c_k une couleur quelconque de $C(t_j)$, et soit μ un marquage courant du RdP coloré. La transition t_j est validée$/c_k$ pour le marquage μ ssi:

$$\mu(p_i) \geq Pre(p_i, t_j/c_k), \forall p_i \in {}^{\bullet}t_j$$

Ex: Dans la figure précédente la transition t_1 est validée par rapport à la couleur $< b >$ car $f(< b >) =< v >$ et p_1 contient 2 marques de couleur $< v >$.

Transition validée II

Par contre t_1 n'est pas validée$/ < o >$ car il faudrait $< b > +2 < o >$ dans p_1.
En d'autres termes:

$$3 < b > +2 < v > + < o > \geq < v >$$

$$3 < b > +2 < v > + < o > \not\geq < b > +2 < o >$$

Franchissement d'une transition validée I

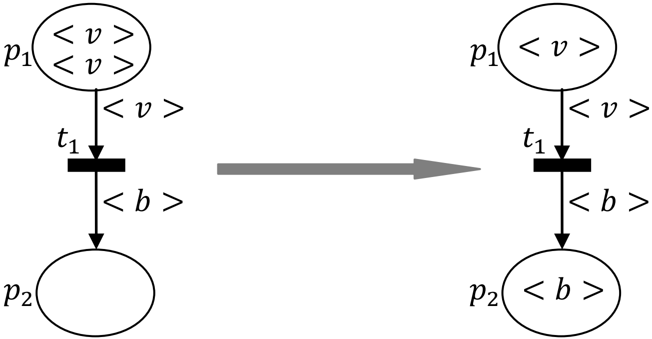
Une transition t_j validée/une couleur c_k peut être franchie. Soit μ' le marquage obtenu après le franchissement de t_j par rapport à c_k.
μ' se déduit de μ par la relation:

$$\mu'(p_i) = \mu(p_i) + Post(p_i, t_j/c_k) - Pre(p_i, t_j/c_k), \forall p_i$$

Ex: Dans la figure précédente $t_1/ < b >$.
$Post(p_2, t_1/ < b >) =< b >$ $\quad$ $Post(p_1, t_1/ < b >) = 0$
$Pre((p_1, t_1/ < b >) =< v >$ $\quad$ $Pre(p_2, t_1/ < b >) = 0$
$\mu'(p_1) = (3 < b > +2 < v > + < o >) + 0- < v >$
$= 3 < b > + < v > + < o >$
$\mu'(p_2) = 0+ < b > -0 =< b >$

Franchissement d'une transition validée II

En d'autres termes: $t_1/ < b >$



Séquence de franchissement I

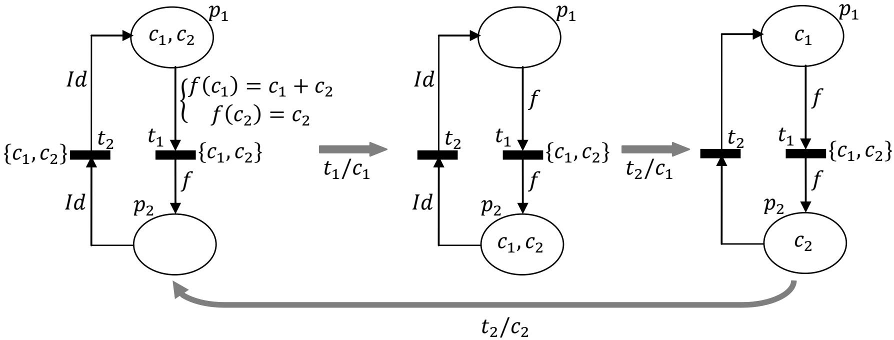
$$\mu_1 t_1/c_{k_1} \mu_2 t_2/c_{k_2} \mu_3 \cdots$$

On obtient alors une séquence de franchissement:
$S = t_1/c_{k_1} t_2/c_{k_2} \cdots t_k/c_{k_k}$ qui passer de μ_1 à μ_{k+1}.

$$\mu_{k+1}(p_i) = \mu_1 + \sum_{j=1}^{k} [Post(p_i, t_j/c_{k_j}) - Pre(p_i, t_j/c_{k_j})]$$

Ex:

Séquence de franchissement II

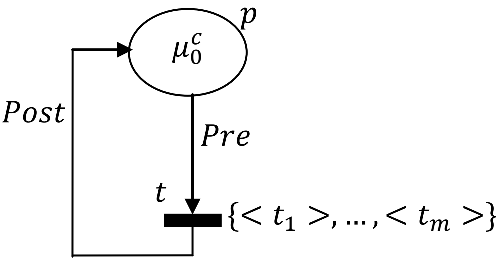


Séquence de franchissement III

$S_1 = t_1/c_1.t_2/c_1.t_2/c_2$ est une séquence de franchissement.
C'est une séquence répétitive.
$S_2 = t_1/c_2.t_2/c_2$ est également une séquence de franchissement répétitive.

Comment construire un RdP coloré? I

On veut de voir que l'on pourrait considérer plusieurs niveaux de coloration dans la construction d'un modèle.
Question: Jusqu'à quel niveau de coloration doit-on aller?
Le cas extrême est le suivant:



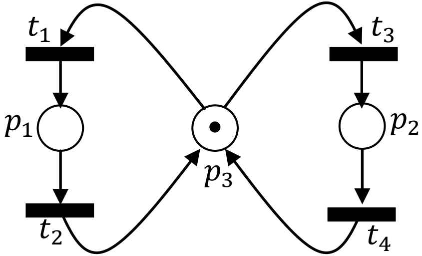
Comment construire un RdP coloré? II

- RdP coloré résultant de la coloration totale d'un RdP ordinaire ayant *n* places et *m* transitions.
- *p* résultant de la fusion des places p_i du réseau ordinaire.
- *t* résultant de la fusion des transitions t_j du réseau ordinaire.
- $c(p) = \{< p_1 >, \cdots, < p_n >\}$
  l'ensemble des couleurs associées à la place *p* est l'ensemble des places p_i.
- $C(t) = \{< t_1 >, \cdots, < t_m >\}$
  L'ensemble des couleurs associées à la transition *t* est l'ensemble des transitions t_j.

Comment construire un RdP coloré? III

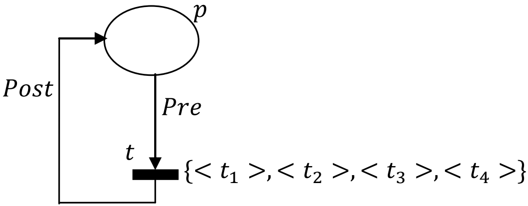
- $\mu_0^c = \mu_0(p_1). < p_1 > + \cdots + \mu_0(p_n). < p_n >$.
  Le marquage initial du RdP coloré correspond à la somme de toutes les marques initiales; chaque marque de la place p_i dans le RdP non coloré correspond à une marque de couleur $< p_i >$ dans le RdP coloré.
- $Pre(p, t/ < t_j >) =$
  $$Pre(p_1, t_j) < p_1 > + \cdots + Pre(p_n, t_j) < p_n >$$
  $Post(p, t/ < t_j >) =$
  $$Post(p_1, t_j) < p_1 > + \cdots + Post(p_n, t_j) < p_n >$$

Comment construire un RdP coloré? IV



Comment construire un RdP coloré? V

$$\left[\begin{array}{l} Pre(<t_1>) = <p_3> \\ Pre(<t_2>) = <p_1> \\ Pre(<t_3>) = <p_3> \\ Pre(<t_4>) = <p_2> \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} Post(<t_1>) = <p_1> \\ Post(<t_2>) = <p_3> \\ Post(<t_3>) = <p_2> \\ Post(<t_4>) = <p_3> \end{array}\right.$$



Cette coloration extrême rend le modèle illisible.

Choix des couleurs I

- Le choix que l'on donne aux couleurs est arbitraire. Dans un RdP totalement coloré on pourrait donner le même nom c_1 à la fois à t_1 et à p_1 parce que ces 2 couleurs ne sont jamais dans le même ensemble ($< p_1 >$ n'est pas une couleur de franchissement de t). On aurait un RdP dont le nombre de couleurs serait $max(n, m)$ au lieu d'être $n + m$.
- Dans le cas général, soit $N(t_j)$ le nombre de couleurs par rapport aux quelles la transition t_j peut être franchie, et $N(p_i)$ le nombre de couleurs des marques qui pouvant être dans la place p_i. Le nombre est $max(N(t_1), N(t_2), \cdots, N(p_1), N(p_2), \cdots)$.

Choix des couleurs II

- En pratique on ne cherche pas nécessairement à minimiser ce nombre, mais plutôt à conserver à chaque couleur une signification qui facilite la compréhension du système décrit.