Réseaux de Petri

Hammadi Bennoui

Computer Science Department,
University of Biskra

December, 2013

Outline

1. Présentation Informelle
   - Définition
2. Définition formelle
3. Propriétés qualitatives
4. Méthodes d'analyse
   - Graphe d'accessibilité
   - Techniques algébriques (structurelles)
   - Techniques de transformation

Outline

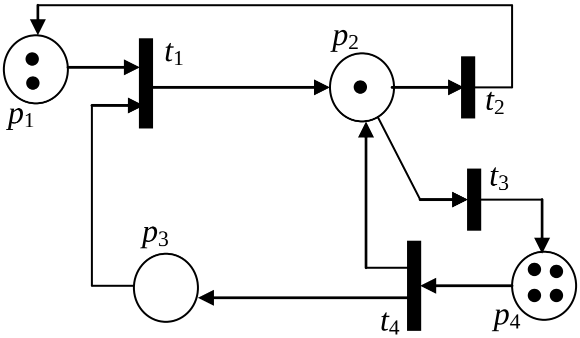
Outline

1. Présentation Informelle
   - Définition
2. Définition formelle
3. Propriétés qualitatives
4. Méthodes d'analyse
   - Graphe d'accessibilité
   - Techniques algébriques (structurelles)
   - Techniques de transformation

Outline

Outline

- Un réseau de Petri est un graphe biparti composé de places et de transitions connectées par des arcs orientés et valués.
- Exemple

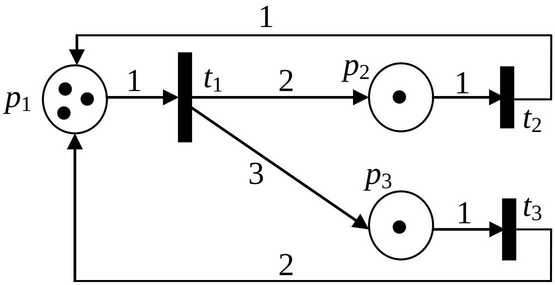


- Un marquage est une séquence d'entiers non négatifs exprimant le nombre de jetons dans les places.
  Exemple: $\mu =< 2, 1, 0, 4 >$

Comportement (dynamique) des RdPs I

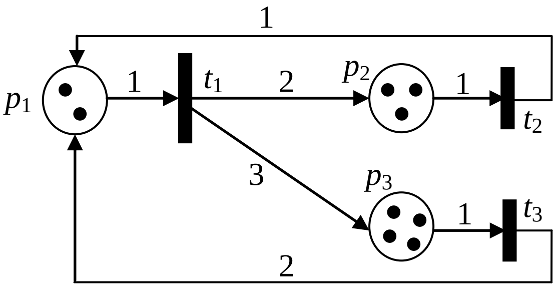
- Le marquage change quand une transition est franchie.
- Une transition qui peut être franchie est dite *sensibilisée*.
- Une transition est sensibilisée si chacune de ses places d'entrée contient un nombre déterminé de jetons.
- Quand une transition est franchie, chacune de ses places de sortie (d'entrée) reçoit (perd) un nombre déterminé de jetons.
- Exemple

Comportement (dynamique) des RdPs II



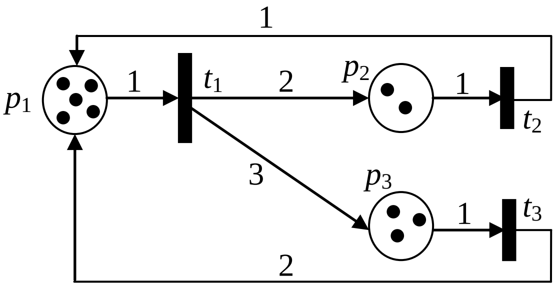
État initial

Comportement (dynamique) des RdPs III



Après franchissement de t_1.

Comportement (dynamique) des RdPs IV



Après franchissement de t_2 et t_3.

Définition formelle I

Un RdP est un quintuplet $RP = (P, T, A, W, \mu_0)$, où:

- P est un ensemble fini de places;
- T est un ensemble fini de transitions, avec $P \cap T = \emptyset$;
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ est un ensemble d'arcs;
- $W : A \longrightarrow \mathbb{N}^+$ est une fonction de poids;
- $\mu_0 : P \longrightarrow \mathbb{N}$ est le marquage initial.

Si $W(a) = 1, \forall a \in A$, le réseau est dit ordinaire.

- $\forall x \in P \cup T$,
  $^\bullet x = \{y \mid (y, x) \in A\} \qquad x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in A\}$

Définitions I

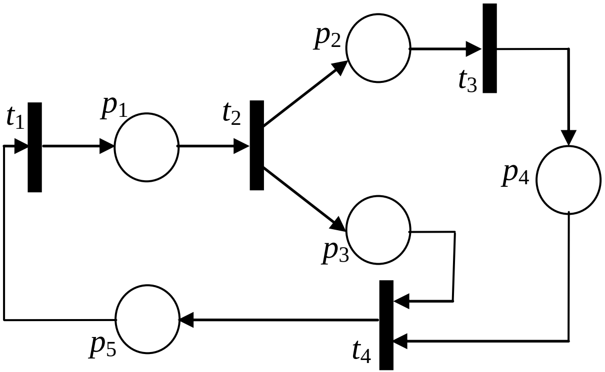
1. $t \in T$ est dite sensibilisée ssi: $\mu(p) \geq W(p,t) \forall p \in {}^\bullet t$.
2. Une transition sensibilisée peut être franchie (ou non).
3. Le franchissement de t se traduit par:
   - le retrait de $W(p,t)$ jetons de chaque $p \in {}^\bullet t$;
   - l'ajout de $W(t,p)$ jetons à chaque $p \in t^\bullet$.

- Une transition sans places d'entrée est dite *transition source*.
  Une transition source est toujours sensibilisée.

Définitions II

- Une transition sans places de sortie est dite *transition puits*.
  Une transition puits peut être franchie si elle est sensibilisée. Si elle l'est, des jetons seront retirés de ses places d'entrée; mais il n y'a pas de création de jetons.
- Un circuit élémentaire est un chemin orienté partant d'une transition donnée (place) et revenant à cette même transition (place) sans passer deux fois (ou plus) par la même place ou transition.
  Exemple:

Définitions III



$\gamma_1 =< t_1, p_1, t_2, p_2, t_3, p_4, t_4, p_5 >$
$\gamma_2 =< t_1, p_1, t_2, p_3, t_4, p_5 >$.

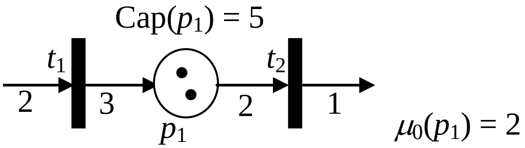
Réseau à capacité finie I

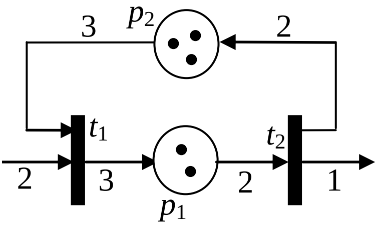
Un réseau à capcité finie est un réseau où chaque place $p \in P$ à une capacité finie $cap(p)$ (le nombre max. de jetons que p peut contenir)

$$Cap : P \longrightarrow \mathbb{N}^{+}$$

Si nous sommes dans un réseau à capcité finie, une condition supplémentaire doit être vérifiée pour qu'une transition t puisse être sensibilisée: le nombre de jetons dans chaque $p \in t^{\bullet}$ ne doit pas excéder $cap(p)$ après le franchissement de t.
Il est toujours possible de transformer un réseau à capacité finie en un réseau à capacité infinie.

Réseau à capacité finie II





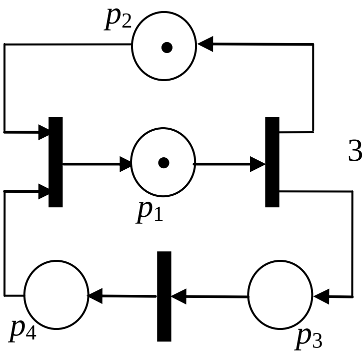
Atteignabilité

On dit qu'un marquage μ est atteignable à partir d'un marquage μ_0 s'il $\exists$ séquence de franchissements menant de μ_0 à μ.
On note par $R(\mu_0)$ l'ensemble de marquages atteignables à partir de μ_0.
Problème d'atteignabilité = Trouver si $\mu \in R(\mu_0)$ et la séquence $\sigma =< t_1, t_2, \cdots, t_n >$ de transitions à franchir pour atteindre μ à partir de μ_0.

Bornitude I

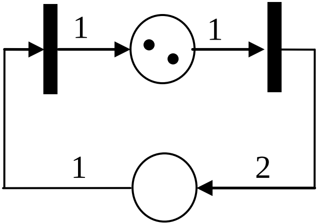
Un réseau est $K-$borné si $\mu(p) \leq K, \forall p \& \forall \mu \in R(\mu_0)$.
Exemple:

Bornitude II



3-borné

Réseau borné



Réseau non-borné

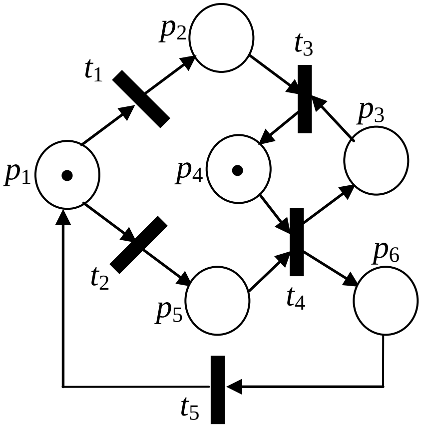
Vivacité I

Un réseau est dit vivace si, à partir d'un marquage $\mu \in R(\mu_0)$ quelconque, il est toujours possible de franchir une transition quelconque du réseau.
En d'autres termes,
$\forall \mu \in R(\mu_0), \forall t \in T \Rightarrow \exists \sigma =< t_1, t_2, \cdots, t_n >|$ t est sensibilisée pour un marquage μ^* obtenu à partir de μ en franchissant les transitions de σ.

Vivacité = Absence de deadlocks.

Exemple (de réseau non vivace)

Vivacité II



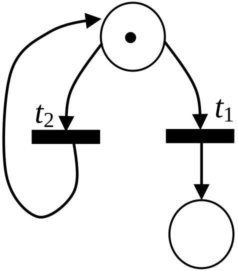
Reversibilité et État d'accueil

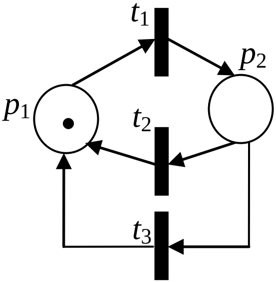
- Un réseau est reversible si $\forall \mu \in R(\mu_0)$ alors $\mu_0 \in R(\mu)$.
- μ^* est un état d'accueil si $\forall \mu \in R(\mu_0)$ alors $\mu^* \in R(\mu)$.
- Un état μ est dit couvert par un autre état $\mu^* \in R(\mu_0)$ si $\mu^*(p) \geq \mu(p) \forall p \in P$.

Persistance I

Un réseau est dit persistant si la condition suivante est remplie: Soit $\mu \in R(\mu_0)$ et $T(\mu) \subset T$ l'ensemble de transitions sensibilisées à μ. si $t \in T(\mu)$ est franchie alors les transitions appartenant à $T(\mu) - \{t\}$ sont toujours sensibilisées.
La notion de persistance est importante quant à la sémantique du parallélisme.
Exemple (de réseau non persistant).

Persistance II





Outline

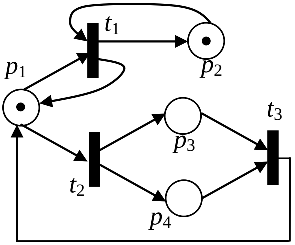
Arbre de couverture I

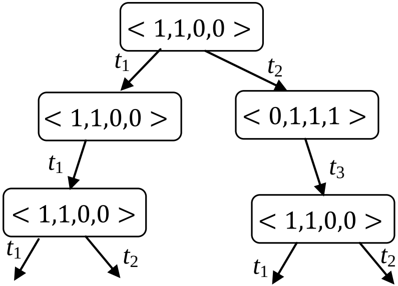
- Soit $T(\mu_0)$ l'ensemble de transitons sensibilisées à μ_0, alors $Card(T(\mu_0))$ nouveaux marquages peuvent être atteints à partir de μ_0 en tirant ces transitions.
- En partant de l'un de ces nouveaux marquages, par exemple μ, $Card(T(\mu))$ nouveaux marquages peuvent être atteints, $\cdots$ etc.

$\longrightarrow$ Ces marquages peuvent être représentés par un arbre où:

- La racine représente μ_0.
- Une nouvelle couche de noeuds représentent l'ensemble de marquages obtenus de ceux représentés par la couche précédente de noeuds en tirant une parmi les transitions sensibilisées.

Arbre de couverture II



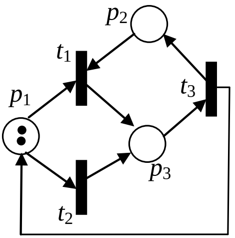


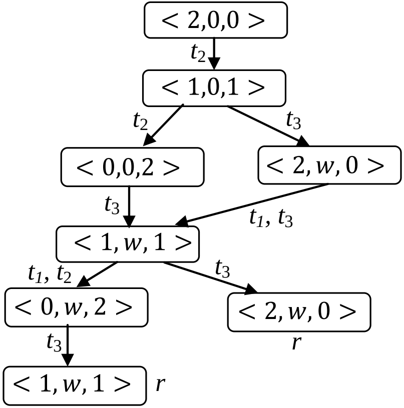
- Un arbre de couverture peut être infini si le réseau n'est pas borné.
- Pour garder l'arbre fini, on utilise les règles suivantes:

Arbre de couverture III

- si μ a déjà été trouvé dans la séquence de marquages menant de μ_0 à μ, on inscrit "*rencontré*" au niveau de μ et on arrète le développement de cette branche.
- si un marquage μ' obtenu à partir de μ est tel que: $\exists \mu'' \in R(\mu_0), \mu \in R(\mu'')$, et $\mu'(p) \geq \mu''(p) \forall p \in P$, alors tout $\mu'(p) \geq \mu''(p)$ est remplacé par w (infinité).

Arbre de couverture IV





Outline

Matrice d'Incidence et Équation d'État I

Soit

$^{\bullet}p_i$ l'ensemble de transitions d'entrée de p_i

$p_i^{\bullet}$ l'ensemble de transitions de sortie de p_i

$^{\bullet}t_j$ l'ensemble de places d'entrée de t_j

$t_j^{\bullet}$ l'ensemble de places de sortie de t_j

Alors:

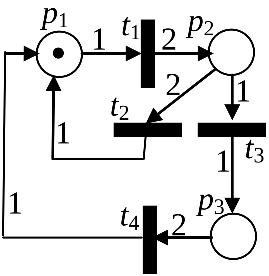
U_{ij} (élément de la matrice d'incidence $U_{i=1,2,\cdots,Card(P),j=1,2,\cdots,Card(T)}$) est défini comme suit:

$$U_{ij} = \begin{cases} W(t_j, p_i) & \text{si } t_j \in {}^{\bullet}p_i \\ -W(p_i, t_j) & \text{si } t_j \in p_i^{\bullet} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$W(x, y)$ est le poids de l'arc (x, y).

Matrice d'Incidence et Équation d'État II

Exemple



$$U = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \end{array}$$

$$U = \left[\begin{array}{ccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ p_1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ p_2 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

On définit aussi $U^+ = [u^+_{ij}]$ et $U^- = [u^-_{ij}]$
Pour notre exemple:

Matrice d'Incidence et Équation d'État III

$$U^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soit σ une séquence de transitions franchies à partir de μ_0.
On note par μ le marquage obtenu après le franchissement de la dernière transition de σ.
On définit le vecteur compteur de franchissement V_σ relatif à la séquence σ comme:
$V_\sigma = \{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$, où $v_i (i = 1, \cdots, q)$ est le nombre de fois que t_i apparait dans σ.
L'équation d'état est définie par:

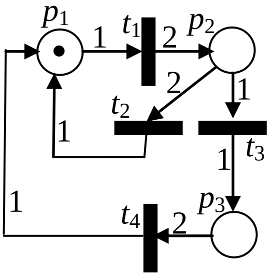
$$^t\mu = {}^t\mu_0 + U \cdot {}^tV_\sigma$$

Matrice d'Incidence et Équation d'État IV

RQ

L'équation d'état ne garantit pas la faisabilité de σ.

Exemple:



Matrice d'Incidence et Équation d'État V

$\mu_0 =< 1, 0, 0 >$
$\sigma =< t_1, t_2, t_1, t_3, t_3, t_4 >$
$V_\sigma = [2, 1, 2, 1]$

$$
{}^t[\mu] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Bornitude structurelle I

- Un RdP est *structurellement borné* s'il est borné pour un marquage initial quelconque.
- On montre qu'un réseau est structurellement borné ssi il existe un vecteur X dont les composants sont des entiers positifs tel que: $X \cdot U \leq 0$.
- Exemple
  Considérons l'exemple précédent:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leq (0, 0, 0, 0)$$

  Ce qui donne

Bornitude structurelle II

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ -x_2 + x_3 &\leq 0 \\ x_1 - 2x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Une solution à ce problème est donnée par:
$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$
Le réseau en question est structurellement borné.

Conservation

Un RdP est dit totalement (resp. partiellement) conservatif si $\exists$ un entier $k_i > 0$ pour chaque (resp. certaines) $p_i \in P$ tel que :
$\sum_{i=1}^{n} k_i.\mu(p_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i.\mu_0(p_i) \qquad \forall \mu \in R(\mu_0)$

Consistance

Un RdP est dit totalement (resp. partiellement) consistant si $\exists$ un marquage initial μ_0 et une séquence de transitions σ contenant chaque (resp. certaines) transition(s) au moins une fois, tel que le franchissement de la séquence σ à partir de μ_0 conduit à μ_0.

P-invariants I

- Soit Z un vecteur dont les composants sont des entiers.
- Z est un P-invariant si $Z.U = 0$.
    - Si $Z > 0 \Longrightarrow$ le réseau est totalement conservatif.
    - Si $Z \geq 0 \Longrightarrow$ le réseau est partiellement conservatif.
- On montre que $Z.^t\mu_0 = Z.^t\mu, \forall \mu \in R(\mu_0)$ si Z est un P-invariant.

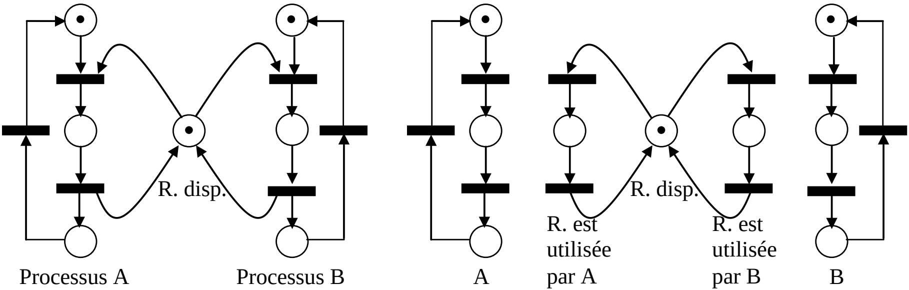
RQ

- Il peut $\exists er$ $\mu \notin R(\mu_0)$ tel que $Z.^t\mu_0 = Z.^t\mu$
- Si $Z > 0$ (i.e. le réseau est totalement conservatif) alors le réseau est borné.

Exemple

P-invariants II

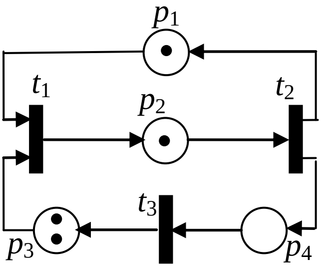
- Exclusion mutuelle de 2 processus pour l'utilisation d'une ressource *R*.



Décomposition en machines à états.

Graphes d'Événements I

- Un graphe d'événements est un RdP tel que chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.
- Exemple



Graphes d'Événements II

- Propriétés structurelles

Matrice d'incidence $U =$

$$\begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ p_1 & -1 & +1 & 0 \\ p_2 & 1 & -1 & 0 \\ p_3 & -1 & 0 & +1 \\ p_4 & 0 & +1 & -1 \end{array}$$

P-invariant

$$Z.U = 0 \Longleftrightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4).\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} -z_1 & +z_2 & -z_3 & & = 0 \\ z_1 & -z_2 & & +z_4 & = 0 \\ & & z_3 & -z_4 & = 0 \end{array} \Longrightarrow z_3 = z_4 = z_2 - z_1$$

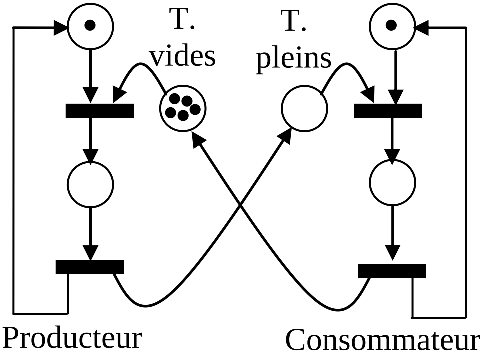
Graphes d'Événements III

$Z_1 = (1, 1, 0, 0), \qquad Z_2 = (0, 1, 1, 1)$
$Z_1 + Z_2 = (1, 2, 1, 1)$.
On sait que $Z_1.{}^t\mu_0 = Z_1.{}^t\mu \qquad \forall \mu \in R(\mu_0)$
$\Longrightarrow$ le nombre de jetons est invariant dans le circuit élémentaire $\gamma_1 =< t_1, p_2, t_2, p_1 > \forall$ la transition franchie.
de même $Z_2.{}^t\mu_0 = Z_2.{}^t\mu \qquad \forall \mu \in R(\mu_0)$
$\Longrightarrow$ le nombre de jetons est invariant dans le circuit élémentaire $\gamma_1 =< t_1, p_2, t_2, p_4, t_3, p_3 > \forall$ la transition franchie.
$\Longrightarrow$ Généralisation de ce résultat.

- Résultat peut être généralisé
  Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons dans un circuit élémentaire est invariant $\forall$ le franchissement de transition.

Graphes d'Événements IV

- Exemple (graphe d'événements)



Problème du producteur/consommateur.

Outline

Transformation

- RdP large $\rightsquigarrow$ RdP de petite taille
  Objectif: Analyse
  Car, les propriétés sont préservées
- RdP abstrait $\rightsquigarrow$ RdP détaillé.
  Objectif: Raffinement