3. System d'équation Algébrique

3.1 Système linéaires

Soit l'ensemble des équations suivant :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \cdots a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \tag{3.1}$$

L'ensemble des équations (3.1) peut être écrit sous la forme suivante

$$[A]\{x\} = \{b\} \tag{3.2}$$

Où $[A]$ est la matrice :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

La solution de l'équation (3.2) peut s'écrire

$$\{\vec{x}\} = A^{-1}.\{\vec{b}\} \tag{3.4}$$

Sachant que le calcul de l'inverse de la matrice $[A]$ peut être compliqué

<u>Exemple :</u>

$$\underline{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 11 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}} \tag{3.5}$$

Comme on peut le voir sur l'équation (3.5) on déduit x_2 en fonction de x_1 cependant c'est compliquer à ***programmer.***

<u>Exemple :</u>

Il existe des systèmes faciles à résoudre même si ils sont de grande taille.

- ❖ Le cas le plus simple est la matrice diagonale*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \tag{3.6}$$

*ce cas est rarement trouvable

- Le deuxième type de système simple est le système triangulaire inférieur ou supérieur.
  - ✓ Pour le triangulaire inférieur tous les a_{ij} sont nul pour $i \prec j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Une triangulaire supérieure est la transposée de la triangulaire inférieure.

« Les systèmes triangulaires sont faciles à résoudre »

On commence par la pointe du triangle puis on résout une à une les équations.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

- La première équation

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{9}{3} = \boxed{3} \tag{3.9}$$

- La 2eme équation (x_1 est connu on peut trouver x_2)

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} = \frac{7-(1)(3)}{2} = \boxed{2} \tag{3.10}$$

- La 3eme équation (x_1 et x_2 sont connus on peut trouver x_3)

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = \frac{14-(3)(3)-(2)(2)}{1} = \boxed{1} \tag{3.11}$$

La loi générale (Algorithme) se trouve la page 106 du livre « Méthode numérique pour l'ingénieur d'André Fortin 4eme édition ».

Il est important de souligner que pour cette méthode les termes de la diagonale ne doivent en aucun cas être nuls.

- On doit ramener un système linéaire quelconque à un ou plusieurs systèmes triangulaires.
- L'élimination de Gauss est un cas particulier de la décomposition LU.

Comment faire pour rendre un système triangulaire ?

On multiplie notre système $A\vec{x}=\vec{b}$ par $W \Rightarrow WA\vec{x}=W\vec{b} \Rightarrow$ On peut re-multiplier par W^{-1}

*La matrice W doit être inversible pour pouvoir calculer W^{-1}

3.2 Opération élémentaire sur les lignes des matrices

Trois (3) opérations qui correspondent à trois (3) types de matrice W

1. Remplacer une ligne l_i par un multiple d'elle-même $\vec{l}_i \leftarrow \lambda\vec{l}_i$
2. Intervertir la ligne i en ligne j $\vec{l}_i \leftrightarrow \vec{l}_j$
3. Remplacer une ligne l_i par la ligne l_i plus un multiple de la ligne j, $\vec{l}_i \leftarrow \vec{l}_i + \lambda\vec{l}_j$

Exemples :

- Multiple d'une ligne (on veut multiplier la 2eme ligne de la matrice A par 3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.12}$$

On multiplie la matrice $[A]$ par la matrice $[M]$ (il est important de multiplier le vecteur $\{b\}$ par la même matrice afin d'assurer l'équilibre de l'équation (3.12).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[M]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[M]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ \boxed{33} \\ 10 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

Il est important de noter que les équations (3.12) et (3.14) ont la même solution.

L'inverse de la matrice $[M]$ est $[M]^{-1}$ ou $M(\vec{l}_i \leftarrow (1/\lambda)\vec{l}_i)$

- Permutation de deux lignes (on veut permuter la ligne 2 et 3)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.15}$$

On multiplie la matrice $[A]$ par la matrice $[P]$ (il est important de multiplier le vecteur $\{b\}$ par la même matrice afin d'assurer l'équilibre de l'équation (3.15).

La matrice $[P]$ est une matrice diagonale unitaire à la base, on change les uns (1) de la diagonale par exemple pour notre cas le A(2,2) =1 deviens A(2,3) = 1, ainsi la deuxième ligne de la matrice est permuter vers le 3eme linge et le A(3,3) = 1 deviens A(3,2) = 1 ainsi la 3eme ligne est permuter vers la 2eme ligne.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[P]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[P]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

Il est important de noter que les équations (3.15) et (3.17) ont la même solution.

L'inverse de la matrice $[P]$ est la matrice $[P]$ elle-même.

- Remplacer est multiplication d'une ligne

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ -2 \\ \rightarrow \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{Bmatrix}}_{\{b\}} \tag{3.18}$$

On veut remplacer la 2eme ligne par elle-même moins (2) deux fois la première ligne. Pour cela on multiplie par la matrice$[T]$, la matrice $[T]$ à la base est une matrice diagonale unitaire, on croise la colonne du pivot et la ligne qu'on veut remplacer pour obtenir la localisation du facteur qu'on doit introduire.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Apres la multiplication du vecteur $\{b\}$ par la matrice $[T]$ on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

Il est important de noter que les équations (3.18) et (3.20) ont la même solution.

Pour trouver l'inverse de la matrice $[T]$ il suffit de remplacer λ par -λ dans

Dans l'équation (3.20) on peut remarquer qu'on a introduit un zéro (0) dans la matrice [A], en remplaçant la ligne 3 par la ligne 3 moins (3/5) la ligne on introduirait un zéro (0) à la position a_{31} et ainsi de suite on peut transformer un système quelconque en un système triangulaire. C'est la base sur laquelle repose la méthode de l'élimination de Gauss.