UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE I : **Cours et Exercices Corrigés**

1^{re} année Mathématiques et Informatique

GHERBAL BOULAKHRAS

Septembre 2018.

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité

1.1 Dérivée en un point

Définition 1.1 *Soit $f'(x)$ une fonction définie sur un intervalle qui contient $[a,b]$ et x_0 un point de $[a,b]$. On définie la fonction Φ par*

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad [a,b]-\{x_0\} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad \Phi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, a<x<b, x\neq x_0. \end{aligned}$$

Si la fonction $\Phi(x)$ admet une limite finie en x_0, on dit que la fonction f est dérivable en x_0. On appelle cette limite, la dérivée de la fonction f au point x_0, et se note $f'(x_0)$, on écrit

$$\lim_{x\to x_0} \Phi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Exemple 1.1 *La dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$*

$$\begin{aligned} \forall x_0 \quad &\in \quad \mathbb{R}, \Phi(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}, \\ &\Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Theorem 1.1 *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables en x_0, alors les fonctons :*

$$\alpha f(x) + \beta g(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(x) \cdot g(x) \text{ et } \frac{f(x)}{g(x)}, g(x_0) \neq 0,$$

sont dérivables en x_0, et

1. $[\alpha f(x) + \beta g(x)]'_{x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.
2. $[f(x) \cdot g(x)]'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x_0} = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Proof. 3) On a

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(x_0) - g(x) \cdot f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x_0) \right). \end{aligned}$$

La démonstration de 1) et 2) est de même façon. ■

Theorem 1.2 *Si $f(x)$ est une fonction dérivable en x_0 et $g(y) = g[f(x)]$ est dérivable en $f(x_0)$, alors $g(y)$ est dérivable en x_0 et*

$$[gof(x)]'_{x_0} = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0).$$

Exemple 1.2 $f(x) = \cos(x^2 + x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$.

1.2 Dérivabilité à droite et la dérivabilité à gauche

Définition 1.2

1. *On dit qu'une fonction $f(x)$ est dérivable à droite en x_0 et sa dérivée $f'\left(x_0^+\right)$, si la fonction $\Phi(x)$ admet une limite à droite en x_0, c'est-à-dire*

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \Phi(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. *On dit qu'une fonction $f(x)$ est dérivable à gauche en x_0 et sa dérivée $f'\left(x_0^-\right)$, si la fonction $\Phi(x)$ admet une limite à gauche en x_0, c'est-à-dire*

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \Phi(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Theorem 1.3 *Une fonction $f(x)$ est dérivable en x_0 si, et seulement si sa dérivée à droite égale à sa dérivée à gauche, c-à-d*

$$f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right).$$

Exemple 1.3 *La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, \ si\ 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 1, \ si\ x > 1, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $x_0 = 1$, car

$$\begin{aligned} f'\left(1^+\right) &= \lim_{x \to 1^+} \Phi(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1 - \ln 1}{x - 1} = 2 \\ &\neq f'\left(1^-\right) = \lim_{x \to 1^-} \Phi(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1. \end{aligned}$$

1.3 Fonction dérivable

Définition 1.3 *Lorsqu'une fonction $f(x)$ est dérivable en tout point d'un intervalle I, on dit que $f(x)$ est dérivable sur I et la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f, notée par f' ou $\frac{d}{dx}f$.*

Proposition 1.1 *Une fonction dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.*

1.3.1 Inverse d'une fonction

Proposition 1.2 *Si une fonction f est dérivable en x_0 et ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_{x_0} = -\frac{f'(x)}{[f(x_0)]^2}.$$

Proof. Pour $x \in I$ et $x \neq x_0$, on peut écrire

$$\Phi(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

sachant que f est dérivable, donc continue en x_0. ■

1.3.2 Fonction réciproque

Proposition 1.3 *Soit f une fonction continue et strictement monotone de I dans $J = f(I)$, dérivable en $x_0 \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si, et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' o f^{-1}}.$$

Proof. On a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

on pose $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ et si $x \to x_0 \Rightarrow y \to f(x_0) = y_0$.

f^{-1} est continue en y_0, donc

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \\ &\Rightarrow \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \left(f^{-1}\right)'(y_0). \end{aligned}$$

■

Exemple 1.4 *La dérivée de la fonction* $y = \arccos x$,

on a

$$\begin{aligned} y &= \arccos x \Rightarrow x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sin x \Rightarrow y^{'} = \frac{-1}{\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

1.4 Théorème de Rolle-théorème des accroissements finis

1.4.1 Extrémum d'une fonction dérivable

Proposition 1.4 *Soient* f *une fonction définie sur un intervalle* I *et* $x_0 \in I$ *qui n'en est pas une borne. Si la fonction présente un extrémum local en* x_0 *et si elle est dérivable en* x_0*, alors* $f'(x_0) = 0$.

1.4.2 Théorème de Rolle

Theorem 1.4 *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$*, et une fonction* f *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *et vérifiant* $f(a) = f(b)$*, il existe donc un réel* c *appartenant à* $]a, b[$ *tel que* $f^{'}(c) = 0$.

1.4.3 Egalité des accroissements finis

Theorem 1.5 *(Formule des accroissements finis) Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$*, et une fonction* f *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *, alors il existe un réel* c *appartenant à* $]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f^{'}(c).$$

Proposition 1.5 *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle* I*. Soient* x *et* h *deux* *réels tels que* $x, x+h \in I$, *alors il existe un réel* $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

1.4.4 Inégalité des accroissements finis

Proposition 1.6 *Etant donnés des réels* a *et* b *tels que* $a < b$, *ainsi qu'une fonction* f *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$, *s'il existe des réel* m *et* M *vérifiant* $\forall x \in]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$, *alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

1.4.5 Théorème d'Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Theorem 1.6 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, *et* f, g *deux fonctions continues sur* I *(sauf peut être en* x_0*) telles que*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,
2. f *et* g *sont dérivables sur* $I - \{x_0\}$ *et* $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$,

si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ \left(l \in \bar{\mathbb{R}}\right)$, *alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \ \left(l \in \bar{\mathbb{R}}\right).$$

Remarque 1.1

1. *Le théorème précédent reste vrai, si on change la condition* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *par* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
2. *Si* $f'(x_0) = 0 = g'(x_0)$ *et* $f'(x), g'(x)$ *vérifiants les conditions du théorème d'hôpital au voisinage de* x_0, *alors*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Exemple 1.5 *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3\sin^2 2x}=\frac{0}{0}$,

les fonctions $f(x)=1-\cos 3x$ *et* $g(x)=3\sin^2 2x$ *vérifiants les conditions du théorème d'hôpital au voisinage de* 0*, alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3\sin^2 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{12\sin 2x\cdot\cos 2x}=\frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{24\cos 4x}=\frac{9}{24}.\end{aligned}$$

1.5 Dérivée seconde

Définition 1.4 *On dit qu'une fonction* f *est deux fois dérivable sur* I*, si la fonction* f' *est dérivable en tout point de* I*. Sa dérivée est appelée la dérivée seconde de* f *; elle est notée* f'' *ou* $\frac{d^2f}{dx^2}$.

1.5.1 Dérivée d'ordre n

Définition 1.5 *Soit* f *une fonction défnie de* I *dans* $\mathbb{R}$*, on pose* $f^{(0)}:=f$ *et l'on définit par récurrence la fonction dérivée* $n^{\text{ème}}$ *de* f *sur* I*, notée* $f^{(n)}$ *ou* $\frac{d^nf}{dx^n}$ *:*

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{df^{(n-1)}}{dx}=\frac{d^2f^{(n-2)}}{dx^2}=\cdots=\frac{d^{n-1}f'}{dx^{n-1}}.$$

Proposition 1.7 f *et* g *deux fonctions définies et* n *fois dérivable sur* I*, alors* $\alpha f+\beta g,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *est* n *fois dérivable sur* I.

Proposition 1.8 *(Formule de Leibniz) Si* f *et* g *deux fonctions définies et* n *fois dérivable sur* I*, alors* $f\cdot g$ *est* n *fois dérivable sur* I *et*

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(k)}\cdot g^{(n-k)}.$$

1.6 Exercices corrigés

EXERCICE 1.

Soient g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un réel et f une fonction définie par $f(x) = (x-a)\,g(x)$. Montrer que f est dérivable en a. Calculer $f'(a)$.

Correction. On a

$$\Phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{(x-a)\,g(x) - 0}{x-a} = g(x),$$

donc

$$\lim_{x\to a}\Phi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

car g est une fonction continue de $\mathbb{R}$, donc continue en a.

EXERCICE 2. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

$$1^\circ)\ f(x) = \begin{cases} \sin 3x \text{ si } x \geq 0 \\ \frac{x}{2} \qquad \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

$$2^\circ) g(x) = |x-1|, x \in \mathbb{R}.$$

Correction. 1°) Si $x \in \left]0, +\infty\right[$, on a $f(x) = \sin 3x$ est dérivable.

Si $x \in \left]-\infty, 0\right[$, on a $f(x) = \frac{x}{2}$ est dérivable. En 0 on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}\Phi(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x - 0}{x} = 3 = f'\left(0^+\right). \\ \text{et } \lim_{x\to 0^-}\Phi(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{2} - 0}{x} = \frac{1}{2} = f'\left(0^-\right). \end{aligned}$$

Comme $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

2°) Si $x \in \left]1, +\infty\right[$, on a $g(x) = x - 1$ est dérivable.

Si $x \in]-\infty, 1[$, on a $g(x) = 1 - x$ est dérivable. En 1 on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \Phi(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-0}{x-1} = 1 = g'\left(1^+\right).\\
\text{et } \lim_{x\to 1^-} \Phi(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x-0}{x-1} = -1 = g'\left(0^-\right).
\end{aligned}$$

Comme $g'(1^+) \neq g'(1^-)$, donc g n'est pas dérivable en 1.

EXERCICE 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ll}
1°)\ f_1(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + \ln(\sqrt{x}+1) & 2°)\ f_2(x) = \cos^3(x^5),\\
3°)\ f_3(x) = e^{\cos\sqrt{x}} & 4°)\ f_4(x) = tg(\ln x),\\
5°)\ f_5(x) = a^{3x} & 6°)\ f_6(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right).
\end{array}$$

Correction.

1°) $f_1(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + \ln(\sqrt{x}+1) \Rightarrow f_1'(x) = \frac{1}{2\ln(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2°) $f_2(x) = \cos^3(x^5) \Rightarrow f_2'(x) = 3\cos^2(x^5) \cdot (-\sin(x^5)) \cdot 5x^4$.

3°) $f_3(x) = e^{\cos\sqrt{x}} \Rightarrow f_3'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} \cdot e^{\cos\sqrt{x}}$.

4°) $f_4(x) = tg(\ln x) \Rightarrow f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x}$.

5°) $f_5(x) = a^{3x} = e^{3x\ln a} \Rightarrow f_5'(x) = 3\ln a \cdot a^{3x}$.

6°) $f_6(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \Rightarrow f_6'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2}{x^3}$.

EXERCICE 4.

1°) Montrer que $e^{-x} = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2°) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 E(2x).$$

Representer la fonction g dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Correction.

1°) Soit $f(x) = e^{-x} - x$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Et comme

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} e^{-x} - x = -\infty, \\ \text{et } \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} e^{-x} - x = +\infty, \end{aligned}$$

alors il existe un réel c tel que : $f(c) = 0 \Rightarrow e^{-c} - c = 0$.

2°) Facile.

EXERCICE 5. Calculer la dérivée $n^{ème}$ des fonctions suivantes

$$f(x) = \cos x \text{ et } g(x) = e^{2x} \cos x.$$

Correction.

1)

- $f(x) = \cos x = \cos\left(x + 0\frac{\pi}{2}\right)$,
- $f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
- $f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$,
- $f^{(3)}(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$,
- $\vdots$
- $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. On peut vérifier par récurrence que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2) En appliquant la formule de Leibniz à $g(x) = e^{2x} \cos x = h(x) \cdot f(x)$, on trouve

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^{(k)}(x) \cdot f^{(n-k)}(x),$$

Comme $h(x) = e^{2x} \Rightarrow h^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, donc

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k e^{2x} \cdot \cos\left(x + (n-k)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= e^{2x} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \cdot \cos\left(x + (n-k)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] André Giroux, Analyse 1, *Notes de Cours*, Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal (Avril 2004).

[2] Ali El-Khatib, *Les principes d'analyse Mathématiques*, M001, l'OPU, (1989).

[3] Baba Hamed, *Analyse II : Rappels de cours et exercices avec solutions.* N° 300, l'OPU, (1992).

[4] Claude Deschamps et André Warusfel, *Mathématiques 1re année : Cours et exercices corrigés*, *1re* année MPSI, PCSI, PTSI. Tome I, Dunod, Paris, (1999).

[5] Jean-Marie Monier, *Analyse MP, Cours, Méthodes et Exercices corrigés*, 5ème édition, Dunod, Paris, 2007, 2013. (Dunod, Paris, 1995 pour la première édition).

[6] Jacques Rappaz & Michel Flück, *Calcul Différentiel et Intégral : Notes de Cours*, Ecole Polytechniques Fédérale de Lausanne, section de Mathématiques (2010).

[7] Rhodes Rémi, *Cours d'Analyse 1ère année*, CEREMADE-Université Paris-Dauphine, (Janvier 2012).

[8] Stephane Balac & Frédéric Sturm, *Exercices D'Algèrbre et Analyse : 154 exercices corrigés de première année, Presses Polytechniques et Universités Romandes, METES LyonTech (2011).*