UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE I : **Cours et Exercices Corrigés**

1^{re} année Mathématiques et Informatique

GHERBAL BOULAKHRAS

Septembre 2018.

Table des matières

Chapitre 1

Continuité

1.1 Continuité sur un intervalle

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.1}$$

Remarque 1.1 *1) On déduire de cette définition, pour qu'une fonction f soit continue en x_0, il faut que f est définie en x_0 et vérifiant la condition (4.1). Exemple la fonction $f(x) = \frac{2}{X-3}$ n'est pas continue en $x_0 = 3$ car elle n'est définie en $x_0 = 3$.*

2) Si on utilise la définition de la limite d'une fonction, f est continue en x_0 si :

a) $f(x)$ est définie en x_0,

b)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0; \forall x \in D_f : |x - x_0| < \lambda \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 1.2 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, si f est continue en tout point de I.*

Exemple 1.1 *La fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Theorem 1.1 *(Caractérisation séquentielle) La fonction f est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite $(X_n)_n$ convergente vers x_0, la suite $(f(X_n))_n$ est convergente vers $f(x_0)$.*

Exemple 1.2 *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{x}, x \neq 0 \\ 1, \qquad x = 0, \end{cases}$$

n'est pas continue en 0, car pour la suite $X_n = \frac{2}{1+4n}$ convergente vers 0, on a

$$f(X_n) = \cos(1+4n)\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0 \neq 1 = f(0).$$

1.2 La continuité à droite et à gauche

Définition 1.3 *On dit qu'une fonction f est continue à droite en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0; \forall x \in D_f : 0 < x < \lambda + x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit qu'une fonction f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0; \forall x \in D_f : x_0 - \lambda < x < 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemple 1.3 *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-|x|}{x}, x \neq 0 \\ -1, \ x = 0, \end{cases}$$

est continue à droite en 0 *mais elle n'est pas continue à gauche en* 0*, car*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+} f(x) &= \lim_{x\to x_0^+} \frac{-|x|}{x} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{-x}{x} = -1 = f(0)\,,\\ \text{et } \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{-|x|}{x} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{x}{x} = 1 \neq f(0)\,.\end{aligned}$$

Theorem 1.2 *La condition nécéssaire et suffisante de la continuité d'une fonction* f *en un point* x_0 *est que* f *soit une fonction continue en* x_0 *à droite et à gauche.*

Exemple 1.4 *Dans l'exemple précédent la fonction* f *n'est pas continue en* 0 *car elle est continue à droite en* 0 *mais elle n'est pas continue à gauche en* 0.

Définition 1.4 *Une fonction* f *est Lipschitzienne sur un intervalle* I *si, pour*

$$k \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Proposition 1.1 *Toute fonction Lipschitzienne sur un intervalle* I *est continue sur* I.

1.2.1 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 1.2 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* I *alors,*

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *est continue sur* I, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \cdot g(x)$ *est continue sur* I.
3. *si* g *ne s'annule pas sur* I, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *est continue sur* I.

Proposition 1.3 *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *Si* f *est une fonction continue de* I *dans* J *et* g *une fonction continue sur* J*, alors la fonction* gof *est continue sur* I.

Proof. $\forall x_0 \in I, \lim_{x\to x_0} gof(x) = \lim_{x\to x_0} g[f(x)] = \lim_{f(x)\to f(x_0)} g[f(x)] = g[f(x_0)] = gof(x_0)\,.$ ∎

Proposition 1.4 *Si* f *est une fonction continue sur* I*, alors* $|f|, f^+$ *et* f^- *sont continues sur* I.

Proof. Les relations $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$ donnent la continuité de f^+ et f^-. ■

Proposition 1.5 *Soit f une fonction continue sur I. La réstriction de f à tout intervalle J inclu dans I est continue sur J.*

1.3 Les théorèmes fondamentaux

1.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Theorem 1.3 *Soit f une fonction continue sur I. Si a et b sont deux points de I tels que :*

$$f(a) \cdot f(b) \leq 0,$$

alors

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = 0.$$

Theorem 1.4 *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.*

Proof. Si $f(a) \leq y \leq f(b)$, il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $f - y$. ■

Corollaire 1.1 *L'image d'une intervalle par une fonction continue est une intervalle.*

Proof. Si f est une fonction continue sur I, il faut montrer que $f(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire

$$\forall y_1, y_2 \in f(I) : [y_1, y_2] \subset f(I).$$

Soient $y_1, y_2 \in f(I), y \in [y_1, y_2]$. Prenons $x_1, x_2 \in I$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Le théorème des valeurs intermériaires nous donne l'existence d'un élément $c \in I$ compris entre x_1 et x_2 tel que $y = f(c)$, alors $y \in f(I)$. ■

Theorem 1.5 *Si f est une application continue et strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa réciproque est continue de J dans I.*

Exemple 1.5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^n, \end{array}$$

est continue et strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est continue. Cette réciproque est appelée fonction racine $n^{ème}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x}. \end{array}$$

1.3.2 Continuité uniforme

Définition 1.5 *Une fonction f définie sur un intervalle I est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0; \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \lambda \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2 *1) Si une fonction f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.*

2) Une fonction Lipschitzienne sur I est uniformément continur sur I.

Exemple 1.6 *La fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[1, 2]$, puisque elle est Lipschitzienne sur $[1, 2]$. On a*

$$\forall x, y \in [1, 2] : \left|x^2 - y^2\right| = |x + y| \cdot |x - y| \leq 4 |x - y|,$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists \lambda = \frac{\varepsilon}{4} > 0; \forall x, y \in [1,2], |x-y| \leq \lambda = \frac{\varepsilon}{4} \\ &\Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| \leq 4|x-y| \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Theorem 1.6 *(Théorème de Heine) Soit f une application continue de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

1.4 Exercices corrigés

EXERCICE 1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \quad \text{si } x = 0 \end{cases},$$

et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, \text{ si } x \neq 0 \\ -1, \quad \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Etudier la continuité des fonctions f et g.

Correction. 1) Si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ est continue. En 0, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$

donc f est continue à droite en 0. Et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{-x} = 1 = f(0),$$

donc f est continue à gauche en 0, alors elle est continue en 0.

2) Si $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ est continue. En 0, on a

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1 = g(0),$$

donc g est continue à gauche en 0. Et

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq g(0),$$

donc g n'est pas continue à droite en 0, alors elle n'est pas continue en 0.

<u>EXERCICE 2.</u> Est-ce que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin 5x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5}, & x = 0 \end{cases},$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 5, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 4, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

<u>Correction.</u> 1) Si $x \in \mathbb{R}^*$, f est continue. En 0, on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{5 \sin 5x}{5x}} = \frac{1}{5} = f(0),$$

donc f est continue en 0. Alors continue sur $\mathbb{R}$.

2) Si $x \in \left]-\infty, 1\right[$, $g(x) = 4 - x$ est continue.

Si $x \in \left]1, 3\right[$, $g(x) = x^2 - 5$ est continue.

Si $x \in]3,+\infty[\,, g(x) = 4$ est continue. Il reste à étudier la continuité en 1 et en 3. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} \left(x^2-5\right) = -4 \\ &\neq \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (4-x) = 3, \end{aligned}$$

donc g n'est pas continue en 1. D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} g(x) &= 4 \\ &= \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(x^2-5\right), \end{aligned}$$

donc g est continue en 3. Alors elle est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

EXERCICE 3. Soit f une fonction définie par

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad \sin \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

1°) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^*$?

2°) Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

3°) Même questions pour la fonction

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad x^2 \sin \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Correction. 1°) Facile.

2°) Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{2}{x^2}$ n'existe pas, alors on peut pas choisir $f(0)$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

3°) Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \frac{2}{x^2} = 0$, alors on peut choisir $g(0) = 0$ pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.