UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE I : **Cours et Exercices Corrigés**

1^{re} année Mathématiques et Informatique

GHERBAL BOULAKHRAS

Septembre 2018.

Table des matières

Chapitre 1

Limites et continuité ponctuelle

On considère des fonctions définies dans une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Notons par D_f son domaine de définition.

1.1 Définitions

1.1.1 Fonctions définies au voisinage d'un point x_0

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction f est définie au voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap D_f \neq 0.$$

Définition 1.2 *On dit qu'une fonction f est définie au voisinage :*

1. *de $+\infty$, s'il existe un réel A tel que :*

$$[A, +\infty[\subset D_f,$$

2. *de $-\infty$, s'il existe un réel A tel que :*

$$]-\infty, A] \subset D_f.$$

Exemple 1.1 *La fonction* $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ *défnie au voisinage de* 0.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ *n'est pas défnie au voisinage de* 0.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ *défnie au voisinage de* $+\infty$.

1.1.2 Fonctions convergent vers 0

Définition 1.3 *Une fonction* f *converge vers* 0 *en* $x_0 \in \mathbb{R}$, *si elle est définie au voisinage de* x_0 *telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \lambda \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Exemple 1.2 *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *défnie sur* $\mathbb{R}^+$, *converge vers* 0 *en* 0, *car*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda = \varepsilon^2 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^+, |x| \leq \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)| = \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Définition 1.4 *1) Une fonction* f *converge vers* 0 *en* $+\infty$, *si elle est définie au voisinage de* $+\infty$ *telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

2) Une fonction f *converge vers* 0 *en* $-\infty$, *si elle est définie au voisinage de* $-\infty$ *telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple 1.3 *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{2x}$ *converge vers* 0 *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$. *En effet, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A = \frac{1}{2\varepsilon} \in \mathbb{R} : \forall x > 0, x \geq \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| = \frac{1}{2x} < \varepsilon.$$

Et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A = \frac{-1}{2\varepsilon} \in \mathbb{R} : \forall x < 0, x \leq \frac{-1}{2\varepsilon} \Rightarrow |f(x)| = \frac{-1}{2x} < \varepsilon.$$

1.2 Limites finies

Définition 1.5 *Une fonction f tend vers le réel l en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ si la fonction $f - l$ converge vers 0 en x_0.*

Ce réel l est unique, on l'appelle limite de f en x_0 et notée par

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Remarque 1.1 *Par définition, la convergence de f vers l en x_0 s'écrit :*

1. *si $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \lambda \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

2. *si $x_0 = +\infty$,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

3. *si $x_0 = -\infty$,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1 *On dit qu'une f est continue en un point x_0, si elle est définie en x_0 et admet une limite finie en x_0 égale à $f(x_0)$, c-à-d :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 1.4 *1) La fonction constante* $f(x) = l, \forall x \in \mathbb{R}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *car elle admet* l *pour limite en tout point de* $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1$?

On a

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon &> 0, \exists \lambda = \frac{\varepsilon}{3} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \lambda = \frac{\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow |(3x-2)-1| = 3|x-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

1.2.1 Propriétés

Proposition 1.2 *S'il existe une fonction* g *définie sur* D_f *converge vers* 0 *en* x_0 *et telle que* $\forall x \in D_f$, $|f(x) - l| \leq g(x)$, *alors* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Exemple 1.5 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{2x^2+x+1} = 1$, *car pour* $x > 0$, *on a*

$$\left|\frac{2x^2+3}{2x^2+x+3} - 1\right| = \frac{x}{2x^2+x+3} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x},$$

avec $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Proposition 1.3 *Si une fonction* f *converge vers* l *en* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, *alors la fonction* $|f|$ *tend vers* $|l|$ *en* x_0.

1.3 Prolongement par continuité

Définition 1.6 *Si* f *une fonction n'est pas définie en* x_0 *qui admet une limite finie* l *en* x_0, *alors la fonction* g *définie sur* $D_f \cup \{x_0\}$ *par :*

$$g(x) = \begin{cases} l & si\ x = x_0 \\ f(x) & sinon, \end{cases}$$

est continue en x_0. *Cette fonction* g *est appelée prolongement par continuité en* x_0 *de* f.

Exemple 1.6 *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$ *peut se prolonger par continuité en* 0, *en posant* $f(0) = 3$.

1.4 Limites infinies

Définition 1.7 *Une fonction* f *tend vers* $+\infty$ *en* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ *si elle définie au voisinage de* x_0 *telle que :*

– *Pour* $x_0 \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \lambda > 0 : \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \lambda \Rightarrow f(x) \geq A.$$

– *Pour* $x_0 = +\infty$, *on a*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \gamma > 0 : \forall x \in D_f, x \geq \gamma \Rightarrow f(x) \geq A.$$

– *Pour* $x_0 = -\infty$, *on a*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha < 0 : \forall x \in D_f, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Remarque 1.2 *Une fonction* f *tend vers* $-\infty$ *en* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ *si* $(-f)$ *tend vers* $+\infty$ *en* x_0, *et on écrit*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

1.5 Opérations sur les limites des fonctions

Theorem 1.1 *Pour $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, on a*

1. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = 0$.
2. *Si g est bornée au voisinage de x_0 et si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = 0$.
3. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, *alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a* $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha l + \beta l'$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = l \times l'$.
4. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$.

Theorem 1.2 *Soit g une fonction qui converge vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$ en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Si f une fonction à valeurs dans D_g admettant x_0 pour limite en $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, alors la fonction gof converge vers l en x_0.*

Exemple 1.7 *Sachant que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ *alors* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x} = 1$.

1.6 Limites à droite et limites à gauche

Définition 1.8 – *On dit qu'une fonction f admet l pour limite à droite en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : x_0 < x < x_0 + \gamma \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

– *On dit qu'une fonction f admet l pour limite à gauche en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 : x_0 - \gamma < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Proposition 1.4 *On dit qu'une fonction f admet l pour limite en x_0 si et seulement si, elle admet l pour limite à droite et à gauche en x_0.*

Proposition 1.5 *Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, l \in \bar{\mathbb{R}},$$

et si pour une fonction $h(x)$ telle que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

alors

$$\lim_{x\to a} h(x) = l.$$

1.7 Exercices corrigés

EXERCICE 1.

Montrer à l'aide de définition d'une limite que

1°) $\lim_{x\to -2} (x^2 - 2) = 2.$

2°) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+x+1}{1-x} = 1.$

Correction.

1°) $\lim_{x\to -2} (x^2 - 2) = 2$? Pour que

$$\begin{aligned} \left|\left(x^2-2\right)-2\right| &< \varepsilon \\ &\Rightarrow |(x-2)| \cdot |(x+2)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

supposons que

$$\begin{aligned} |(x+2)| &\leq 1 \Rightarrow -1 \leq x+2 \leq 1 \\ &\Rightarrow -5 \leq x-2 \leq -3 < 5 \\ &\Rightarrow |(x-2)| \leq 5, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donc, on a

$$\begin{aligned} |(x-2)| \cdot |(x+2)| &\leq 5\,|(x+2)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |(x+2)| < \frac{\varepsilon}{5}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

d'après (3.1) et (3.2), il suffit de prendre $\lambda = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, alors

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists \lambda = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x+2| \leq \lambda = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} \\ &\Rightarrow \left|\left(x^2-2\right)-2\right| = |x+2| \cdot |x-2| < |x+2| \cdot \frac{\varepsilon}{5} = 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2°) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+x+1}{1-x} = \frac{1}{2}$? Pour que

$$\left|\frac{x^2+x+1}{1-x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x^2+3x+1}{2\,(1-x)}\right| = \left|\frac{(x+1)\,(2x+1)}{2\,(1-x)}\right|, \tag{3.3}$$

supposons que

$$\begin{aligned} |x+1| &\leq 1 \Rightarrow -1 \leq x+1 \leq 1 \\ &\Rightarrow -2 \leq 2x+2 \leq 2 \\ &\Rightarrow -3 \leq 2x+1 \leq 1 < 3 \\ &\Rightarrow |2x+1| \leq 3, \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} -1 &\leq x+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0 \qquad (3.4) \\ &\Rightarrow 0 \leq -x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1-x \leq 3 \\ &\Rightarrow 1 \leq |1-x|, \end{aligned}$$

donc (3.3) nous donne

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2+x+1}{1-x}-\frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{(x+1)(2x+1)}{2(1-x)}\right| = \frac{1}{2}\frac{|x+1|\cdot|2x+1|}{|1-x|} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{|x+1|\cdot 3}{1} \leq \varepsilon \Rightarrow |x+1| \leq \frac{2}{3}\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.5}$$

d'après (3.4) et (3.5), il suffit de prendre $\lambda = \min\left\{1, \frac{2}{3}\varepsilon\right\}$, alors le reste de démonstration est de même façon que la question précédente.

EXERCICE 2. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m, m \in \mathbb{N}^*.$$

1°) Trouver le domaine de définition de f.

2°) Discuter la limite de f quand x tend vers 0 suivant les valeurs du paramètre m.

Correction.

1°) Facile.

2°) On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1-\cos x}}\right)^m = \left(\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}\right)^m \\ &= \left(\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot\sqrt{1+\cos x}\right)^m = \left(\frac{\sin x}{|\sin x|}\right)^m\cdot\left(\cos x\sqrt{1+\cos x}\right)^m, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{|\sin x|}\right)^m\cdot\left(\cos x\sqrt{1+\cos x}\right)^m &= \left(\sqrt{2}\right)^m, \\ \text{et } \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{|\sin x|}\right)^m\cdot\left(\cos x\sqrt{1+\cos x}\right)^m &= (-1)^m\left(\sqrt{2}\right)^m, \end{aligned}$$

alors si m est paire $f(x)$ admet une limite égale à $\left(\sqrt{2}\right)^m$ en 0 et si m est impaire $f(x)$ n'admet une limite en 0.

EXERCICE 3. Calculer les limites suivantes

$$1^\circ)\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad 2^\circ)\lim_{x\to+\infty} x\ln\sqrt{1+\frac{1}{x}},$$

$$3^\circ)\lim_{x\to 0} tg\,(x)\cos\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$4^\circ)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1},\ 5^\circ)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x},$$

$$7^\circ)\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

Correction. 1°)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

2°)

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{2}.$$

3°)

$$\lim_{x\to 0} tg\,(x)\cos\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

car est le produit de deux fonctions, l'une converge vers 0 et l'autre bornée.

4°)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3,\ (\text{posant } 1+x=y^6).$$

5°)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=1.$$

6°)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1.$$

EXERCICE 4. Calculer les limites suivantes

$$1°)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}\qquad 2°)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x,$$

$$3°)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$$

$$4°)\ \lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(a+bx)-\ln(bx)\right],\ a,b\in\mathbb{R}_+^*.$$

Correction. 1°)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{y}\right)^y,\ (y=\frac{1}{x}),\\ &= 3.\end{aligned}$$

2°)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}=\frac{e^{-2}}{e^3}=\frac{1}{e^5}.$$

3°) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\frac{1}{e^{a+b}}$ de même façon que 2°).

4°) $\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(a+bx)-\ln(bx)\right]=\frac{a}{b}$, en utilisant les propriétés de logarithme et de même façon que 1°).