UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE I : **Cours et Exercices Corrigés**

1^{re} année Mathématiques et Informatique

GHERBAL BOULAKHRAS

Septembre 2018.

Table des matières

Chapitre 1

SUITES REELLES

1.1 Rappel

Définition 1.1 *On appelle suite à termes réels, ou suite réelle, toute famille de nombres réels indexée par* $\mathbb{N}$*, elle se note* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.1 *La suite de terme général* $U_n = a + nr$*, avec* $a, r \in \mathbb{R}$ *est une suite arithmétique de premier terme* a *et de raison* r.

Définition 1.2 *Une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

- *Constante, si :* $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n$.
- *Stationnaire, si :* $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k, U_{n+1} = U_n$.

Définition 1.3 *Une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

- *Majorée, si :* $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
- *Minorée, si :* $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
- *Bornée, si elle est majorée et minorée.*

Définition 1.4 *Une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

- *Croissante (resp, strictement croissante), si :* $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$ *(resp,* $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$*).*

- *Décroissante (resp, strictement décroissante), si :* $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n (resp, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n)$.
- *Monotone (resp, strictement monotone), si elle est croissante (resp, strictement croissante) ou décroissante (resp, strictement décroissante).*

Exemple 1.2
1. *La suite* $U_n = \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ *est une suite constante et elle est croissante et décroissante.*
2. *La suite* $U_n = \frac{1}{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ *est une suite décroissante.*
3. *La suite* $U_n = (-n)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ *n'est pas monotone.*

1.2 Suites convergentes

Définition 1.5 *On dit qu'une suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers le réel* l *(ou tend vers* l*)si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l *est appelé la limite de la suite, on note :* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

Exemple 1.3 *La suite* $U_n = \frac{1}{n+2}$ *converge vers* 0 *car :*
$\forall \varepsilon > 0,$ *on cherche* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\begin{aligned} n &\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n+2} - 0\right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2, \end{aligned}$$

donc il suffit de prendre $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1,$ *alors*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n_0+2} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n+2} - 0\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Soient* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $l \in \mathbb{R}$. *S'il existe une suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* 0 *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - l| \leq V_n,$$

alors la suite $(U_n)_n$ *converge vers* l.

Exemple 1.4 *La suite* $U_n = \frac{\left(3n^2+1\right)^2}{n^4}$ *converge vers* 9, *car*

$$\begin{aligned} \left|\frac{\left(3n^2+1\right)^2}{n^4} - 9\right| &= \left|\frac{\left(3n^2+1\right)^2 - 9n^4}{n^4}\right| \\ &= \left|\frac{\left(3n^2+1-3n^2\right)\left(3n^2+1+3n^2\right)}{n^4}\right| \\ &= \left|\frac{6n^2+1}{n^4}\right| = \left|\frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right| < \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{7}{n^2}, \end{aligned}$$

et comme la suite $U_n = \frac{7}{n^2}$ *converge vers* 0, *alors d'après la proposition précédente on a le résultat.*

Proposition 1.2 *Si une suite* $(U_n)_n$ *converge vers* l, *alors la suite* $(|U_n|)_n$ *converge vers* $|l|$.

Remarque 1.1 *La réciproque de la proposition précedente est fausse. Exemple la suite* $(|U_n|)_n = |(-1)^n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ *convergente par contre la suite* $(U_n)_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ *est divergence.*

1.3 Propriétés

Proposition 1.3 *(Condition nécessaire de convergence) Toute suite convergente est bornée.*

Exemple 1.5 *La suite* $U_n = n$ *n'est pas convergente car elle n'est pas bornée.*

Remarque 1.2 *La réciproque de la proposition précédente est fausse, car la suite* $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée mais elle n'est pas convergente.*

Proposition 1.4 *Soit $m \in \mathbb{R}$. Si $(U_n)_n$ est une suite qui converge vers $l > m$, alors*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, U_n \geq m.$$

Corollaire 1.1 *Une suite $(U_n)_n$ converge vers $l > 0$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang.*

1.4 Suites tendant vers l'infini

Définition 1.6 *On dit qu'une suite $(U_n)_n$ est divergente :*

– *tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow U_n \geq A,$$

– *tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow U_n \leq A.$$

Theorem 1.1 *Si $(U_n)_n$ est une suite qui converge vers 0 et $(V_n)_n$ est une suite bornée, alors la suite $(U_n \cdot V_n)$ converge vers 0.*

Exemple 1.6 *La suite $U_n = \frac{\sin(3n-1)}{n}$ converge vers 0 puisque elle est le produit d'une suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ qui converge vers 0 et une suite bornée $(\sin(3n-1))_n$.*

1.4.1 Inverse et quotient

Proposition 1.5 *Soit $(U_n)_n$ est une suite qui converge vers $l \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang n_0 tous les U_n sont non nuls, et la suite $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$.*

Proposition 1.6 *Soit $(U_n)_n$ une suite qui diverge vers $\pm\infty$. Alors, à partir d'un certain rang n_0 tous les U_n sont strictement positifs, et la suite $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.*

Proposition 1.7 *Soit* $(U_n)_n$ *est une suite qui converge vers* 0*, dont tous les* U_n *sont strictement positifs (resp, strictement négatifs) à partir d'un certain rang* n_0*. Alors la suite* $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n\geq n_0}$ *diverge vers* $+\infty$ *(resp, diverge vers* $-\infty$*).*

Remarque 1.3
1. *Les résultats des trois proposition précédentes peuvent se résumer :*

$$si \lim_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}^* \cup \left\{-\infty, +\infty, 0^+, 0^-\right\},$$

   alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{l},$$

   avec $\frac{1}{0^+} = +\infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$ *et* $\frac{1}{\pm\infty} = 0$.

2. *En utilisant les résultats sur l'inverse et le produit, on peut donner les résultats sur le quotient de deux suites : si* U_n *et* V_n *deux suites admettant respectivement* $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ *et* $l_2 \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty, 0^+, 0^-\}$ *pour limites, aloes* $\frac{U_n}{V_n}$ *admet* $\frac{l_1}{l_2}$ *pour limite s'il n'y a pas une des formes indéterminées suivantes :* $\frac{0}{0^\pm}$ *ou* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Proposition 1.8 *Soient* U_n *et* V_n *deux suites telles que :*

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0, U_n \leq V_n,$$

1. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$*,*
2. *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$*.*

1.4.2 Conséquence de la propriété de la borne superieure

Proposition 1.9 *Soit* $(U_n)_n$ *est une suite croissante.*

1. *Si elle est majorée, elle converge vers* $l = \sup\{U_n / n \in \mathbb{N}\}$*.*
2. *Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers* $+\infty$*.*

Proposition 1.10 *Soit* $(U_n)_n$ *est une suite décroissante.*

1. *Si elle est minorée, elle converge vers* $l = \inf \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$.

2. *Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers* $-\infty$.

1.5 Suites adjacentes, segments emboîtés

Définition 1.7 *Soient* $(U_n)_n$ *et* $(V_n)_n$ *deux suites réelles. On dit que* $(U_n)_n$ *et* $(V_n)_n$ *sont adjacentes si :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$,

2. U_n *est croissante et* V_n *est décroissante.*

3. $(V_n - U_n)_n$ *tend vers* 0.

Proposition 1.11 *Deux suites adjacentes* $(U_n)_n$ *et* $(V_n)_n$ *convergent vers une limite commune* l *vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq l \leq V_n.$$

Theorem 1.2 *(Segment emboîtés). Si* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de segments non vides dont les longueurs tendent vers* 0, *alors l'ensemble* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} [a_n, b_n]$ *est réduit à un point.*

Proof. La suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Donc on a :

1. la suite $(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante,

2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$,

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont donc adjacentes. Si l désigne leur limite commune, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n.$$

la valeur l appartenant à chacun des intervalles $[a_n, b_n]$, et donc à leur intersection $\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \right)$ qui est donc non vide.

Réciproquement, si x appartenant à $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n,$$

et par passage à la limite, on obtient

$$l = \lim_{n \to +\infty} a_n \leq x \leq \lim_{n \to +\infty} b_n = l,$$

donc

$$l = x \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}.$$

■

1.5.1 Suites extraites

Définition 1.8 *Une suite $(V_n)_n$ est appelée suite extraite ou sous-suite d'une suite $(U_n)_n$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{\varphi(n)}$.*

Exemple 1.7 *Les deux suites $(U_{2k})_k$ et $(U_{2k+1})_k$ sont deux suites extraites de la suite $(U_n)_n$.*

Proposition 1.12 *Toute $(V_n)_n$ suite extraite d'une suite $(U_n)_n$ qui converge vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$, converge vers l.*

Remarque 1.4 *En utilisant la proposition précédente pour démontrer qu'une suite n'est* *pas convergente, en cherchant deux suites sous-suites convergent vers des limites différentes.*

Exemple 1.8 *La suite* $U_n = (-1)^n$ *est divergente, car la sous-suite* $(U_{2k})_k$ *converge vers* 1 *et la sous-suite* $(U_{2k+1})_k$ *converge vers* -1.

1.5.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Theorem 1.3 *Toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.*

Exemple 1.9 $U_n = (-1)^n$ *est une suite bornée, donc possède deux sous-suites convergentes :*

1. *la suite* $(a_n)_n = (U_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)^{2k} = 1$, *qui converge vers* 1,
2. *la suite* $(b_n)_n = (U_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)^{2k+1} = -1$, *qui converge vers* -1.

1.5.3 Suites de Cauchy

Définition 1.9 *On dit que* $(U_n)_n$ *est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > m \geq n_0 \Rightarrow |U_n - U_m| < \varepsilon.$$

Aussi est une suite dont les termes se rapprochent à partir d'un certain rang.

Exemple 1.10 *La suite* $U_n = 3 - \frac{1}{2n}$ *est de Chauchy, car*

$$\text{soit } n > m, \text{ c-à-d : } m = n + k, k \in \mathbb{N}, \text{ donc il faut que}$$

$$\begin{aligned}
\left|\left(3 - \frac{1}{2m}\right) - \left(3 - \frac{1}{2n}\right)\right| &= \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+k)}\right| \\
&= \frac{k}{2n(n+k)} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \text{c-à-d } n > \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon &> 0, \exists n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} : m > n \geq n_0 \Rightarrow \left|\left(3-\frac{1}{2m}\right)-\left(3-\frac{1}{2n}\right)\right| \\ &< \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Theorem 1.4 *Toute suite de Cauchy bornée.*

Theorem 1.5 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Proof. $(U_n)_n$ est une suite qui converge vers l, c-à-d

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc pour

$$\begin{aligned} m &> n \geq n_0, \text{ on a} : |U_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{alors pour } m &> n \geq n_0, |U_m - U_n| = |U_m - l + l - U_n| \\ &\leq |U_m - l| + |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

1.6 Exercices corrigés

EXERCICE 1. Répondez aux questions suivantes par oui ou non, si la réponse est oui, prouver, et si la réponse est non, donner un contre exemple

1) Toute suite majorée est croissante.

2) Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(U_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

3) Si $1 \leq U_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} U_n \leq 2$.

4) Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction.

1) Non, car la suite $U_n = (-3)^n$ est majorée par 3 mais elle n'est pas croissante.

2) Oui, car si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n^2 = \lim_{n\to+\infty} U_n \cdot \lim_{n\to+\infty} U_n = l \cdot l = l^2.$$

3) Oui, par passage à la limite dans l'inégalité $1 \leq U_n \leq 2$.

4) Non, car la suite $U_n = \frac{1}{2n+3}$ est convergente vers 0 mais la suite $U_n = 2n+3$ est divergente.

EXERCICE 2.

i) Etudier la monotonie des suites suivantes :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2+n} + \frac{1}{n+3}, U_n = -n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ U_n &= n\left(n + (-1)^n\right), U_n = \sqrt[n]{2}, U_n = -n + n^2, U_n = \sin(n). \end{aligned}$$

ii) Montrer que si $(U_n)_n$ une suite croissante, alors la suite définie par $V_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} U_k$ est croissante.

Correction.

i) En calculant la différence

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{3+n} + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{2+n} - \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{n+3-n-4}{(3+n)(n+4)} = \frac{-1}{(3+n)(n+4)} < 0, \end{aligned}$$

donc, $(U_n)_n$ est strictement décroissante.

$\lozenge$ $U_n = \sqrt[n]{2}$, on a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2^{\frac{1}{n+1}} \cdot 2^{\frac{-1}{n}} = 2^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = 2^{\frac{-1}{n(n+1)}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n(n+1)}}} < 1,$$

donc, $(U_n)_n$ est strictement décroissante.

$\lozenge$ Le reste des suites de même façon.

ii) la suite $(U_n)_n$ est croissante, on a

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} U_k = \frac{1}{n+2}\left(U_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} U_k\right) \\ &= \frac{U_{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}V_n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{U_{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}V_n - V_n \\ &= \frac{U_{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}V_n - \frac{n+2}{n+2}V_n \\ & \quad \frac{U_{n+1}}{n+2} - \frac{1}{n+2}V_n \\ &= \frac{1}{n+2}\left(U_{n+1} - V_n\right) \\ &= \frac{1}{n+2}\left(U_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k\right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(U_{n+1} - U_k\right) \geq 0, \end{aligned}$$

alors $(V_n)_n$ est croissante.

EXERCICE 3.

1) En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{2\log(n+1)}{\log(n)} = 2, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+e^n)}{2n} = \frac{1}{2}, \ \lim_{n\to\infty}(1-2n) = -\infty.$$

2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} U_n^\beta = 0, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+a)^\beta} = 0$.

<u>**Correction.**</u> 1)

♦ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, facile.

♦ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\log(n+1)}{\log(n)} = 2$, en effet, pour que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2\log(n+1)}{\log(n)} - 2\right| &= \left|\frac{2\log(n+1) - 2\log(n)}{\log(n)}\right| = \left|\frac{2\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log n}\right| \\
&= \left|\frac{2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right| \\
&\leq \frac{2\log 2}{\log n}, \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

on prend $\dfrac{2\log 2}{\log n} < \varepsilon$ ce qui implique que $\log n > \frac{2\log 2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \exp\left(\dfrac{2\log 2}{\varepsilon}\right)$, donc il suffit de prendre $n_0 > \exp\left(\frac{2\log 2}{\varepsilon}\right)$ ou $n_0 = \left\lfloor \exp\left(\frac{2\log 2}{\varepsilon}\right)\right\rfloor + 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon &> 0, \exists n_0 = \left\lfloor \exp\left(\frac{2\log 2}{\varepsilon}\right)\right\rfloor + 1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 > \exp\left(\frac{2\log 2}{\varepsilon}\right) \\
&\Rightarrow \log n > \frac{2\log 2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{2\log 2}{\log n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

et d'après (2.1) on a

$$\left|\frac{2\log(n+1)}{\log(n)} - 2\right| \leq \frac{2\log 2}{\log n} < \varepsilon.$$

♦ Pour prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+e^n)}{2n} = \frac{1}{2}$ il siffit de prendre $n_0 = E\left[\frac{\log 2}{2\varepsilon}\right] + 1$ et faire la même chose que la limite précédente.

♦ $\lim\limits_{n\to\infty} (1-2n) = -\infty$, c-à-d

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow (1-2n) \leq A?$$

Pour que

$$(1-2n) \leq A \Rightarrow -2n \leq A - 1 \Rightarrow n \geq \frac{1-A}{2},$$

donc, il suffit de prendre $n_0 = E\left[\frac{1-A}{2}\right] + 1$, alors

$$\begin{aligned} \forall A &\in \mathbb{R}, \exists n_0 = E\left[\frac{1-A}{2}\right] + 1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \geq \frac{1-A}{2} \\ &\Rightarrow -2n \leq A - 1 \Rightarrow (1-2n) \leq A. \end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n^{\alpha} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$?
On a

$$\forall \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |U_n| < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},$$

ce qui nous donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |U_n^{\alpha}| = |U_n|^{\alpha} < \left(\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \varepsilon.$$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} U_n^{\alpha} = 0$.
Pour déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+a)^{\alpha}} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+a}\right) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+a)^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+a}\right)^{\alpha} = 0,$$

d'après le résultat précédent.

<u>EXERCICE 4.</u> Etudier la convergence des suites suivantes :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{2}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, U_n = \frac{2^n - (-2)^n}{2^n}, U_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2) 2n}, \\ U_n &= x^n, x \in \mathbb{R}, U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}. \end{aligned}$$

<u>Correction.</u>

♦ $U_n = \frac{2}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, converge vers 0.

♦ $U_n = 1 - (-1)^n$, est divergente.

♦ $U_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2) 2n}$, on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, donc $(U_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 (car elle est positive), alors elle converge vers 0.

♦ $U_n = x^n, x \in \mathbb{R}$,

1) si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$,

2) si $x > 1$, donc d'après la formule de Niewten on a,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k x^{n-k} \geq 1 + nx \\ &\Rightarrow x^n = ((x-1)+1)^n \geq 1 + n(x-1),\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + n(x-1) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$.

♦ Si $0 < x < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

♦ Si $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

♦ Si $-1 < x < 0$, posons $y = -x$ pour $0 < y < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n y^n = 0$.

♦ Si $x = -1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \pm 1$, divergente.

♦ Si $x < -1$, posons $x = -y$, pour $y > 1$, donc

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n y^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est paire} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impaire,} \end{cases}$$

divergente.

Alors la suite $U_n = x^n$ est convergente pour $-1 < x \leq 1$.

3) $U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$, convergente.

EXERCICE 5.

1. Etudier la convergence de la suite $(U_n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, (en considérant $U_{2n} - U_n$). Montrer que ce n'est pas une suite de Cauchy.

2. Montrer que les suites $(U_n), (V_n)$ et (W_n) définies par : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}, V_n = U_n + \frac{1}{n}$ et $W_n = U_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ sont convergentes et ont la même limite. (Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et (U_n) et (W_n) sont adjacentes).

Correction.

1. $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, U_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$, donc

$$U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

donc $(U_n)_n$ n'est de Cauchy alors n'est pas convergente.

2. On a

$$\begin{cases} U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n} \\ W_n = U_n + \frac{1}{n \cdot n!}, \end{cases}$$

donc

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

alors $(U_n)_n$ est croissante. On a aussi

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1 - (n-2)!}{(n+1)!} \leq 0,$$

alors $(V_n)_n$ est décroissante. Et comme

$$\lim_{n\to\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

et $V_n - U_n = \frac{1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors (V_n) et (U_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.

♦ $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{-1}{n(n+1)} \right) < 0 \Rightarrow (W_n)$ est décroissante.

et $\lim\limits_{n\to\infty} (W_n - U_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot n!} = 0$ et $W_n \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors (W_n) et (U_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.