UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE I : **Cours et Exercices Corrigés**

1^{re} année Mathématiques et Informatique

GHERBAL BOULAKHRAS

Septembre 2018.

Table des matières

Chapitre 1

LES NOMBRES REELS

1.1 Les nombres réels

1.1.1 Introduction

Pour mésurer une longueur, on utilise d'abord les nombres entiers ; pour améliorer cette mesure, en introduisant des nombres s'écrivant comme quotient des entiers ; ce que nous appelons les nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Mais en général, on peut pas mesurer toute longueur à l'aide de quotient des entiers, cette insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels peut s'éxprimer comme suit :

Sur $\mathbb{Q}$, la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 - 2$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives mais elle ne s'annule pas, ce qui n'est pas naturel.

Pour traiter ce problème d'insuffisance, on introduit le corps $\mathbb{R}$ des réels, qui contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationels comme sous-corps. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés irrationnels.

Exemple 1.1 *La fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 - 3$, s'annule dans un nombre irrationnel, se note $\sqrt{3}$.*

Proposition 1.1 $\mathbb{R}$ *est un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne* *superieure.*

Proof. Voir le cours d'algebre 1. ■

1.1.2 Corps totalement ordonné

Définition 1.1 *Le "corps totalement ordonné" des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :*

– *deux applications (lois internes) "$+$" et "$\times$" définies de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x \times y$,*

– *une relation d'ordre totale " $\leq$ ",*

qui satisfont

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps,*
2. *la relation " $\leq$ " est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$,*
3. *pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :*

$$\begin{aligned} x &\leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \\ \text{et } (x \leq y \text{ et } 0 \leq z) &\Rightarrow xz \leq yz. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *la relation " $\leq$ " est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

1.1.3 Valeur absolue

Définition 1.2 *Si $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue d'un réel x, notée par $|x|$ est le réel défini par*

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$x^+ = \max(x, 0) \text{ et } x^- = \max(0, -x),$$

donc

$$x = x^+ - x^- \text{ et } |x| = x^+ + x^-,$$

ce qui donne

$$x^+ = \frac{x + |x|}{2} \text{ et } x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Proposition 1.2

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \times y| = |x| \times |y|,$
4. $\forall (x, y, h) \in \mathbb{R}^3, |y - x| \leq h \Longleftrightarrow x - h \leq y \leq x + h,$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|.$ *($1^{\text{ère}}$ Inégalité triangulaire).*
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$ *($2^{\text{ème}}$ Inégalité triangulaire).*

Définition 1.3 *La distance de deux nombres réels x, y, c'est la valeur absolue de leur différence.*

1.1.4 Rationnels et irrationnels

D'après l'exemple 1.1, l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non vide puisqu'il contient $\sqrt{3}$.

Proposition 1.3 *Si x est un irrationnel et y est un rationnel, alors $z = x + y$ est un irrationnel.*

Proof. Raisonnons par l'absurde : si z étant rationnel, alors $x = z - y$ aussi, ce qu'est contradictoire. ∎

On peut démontrer de même manière que le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est un irrationnel.

L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$ est donc infini, puisqu'il contient tous les réels $l+\sqrt{3}$, avec $l\in\mathbb{Q}$.

Remarque 1.2 *La somme et le produit de deux irrationnels n'est pas nécessairement irrationnel, exemple :*

$$\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)=2\in\mathbb{Q}\ et\ \left(1+\sqrt{3}\right)\times\left(1-\sqrt{3}\right)=-2\in\mathbb{Q}.$$

1.1.5 Droite numérique achevée

Définition 1.4 *On appelle droite numérique achevée, l'ensemble :*

$$\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre $\leq$ sur $\bar{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x\in\bar{\mathbb{R}},x\leq+\infty\ et\ \forall x\in\bar{\mathbb{R}},-\infty\leq x.$$

Avec cette définition on a :

1. $+\infty$ est le plus grand élément de $\bar{\mathbb{R}}$ et égale à $\sup\bar{\mathbb{R}}$.
2. -∞ est le plus petit élément de $\bar{\mathbb{R}}$ et égale à $\inf\bar{\mathbb{R}}$.

1.1.6 Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1.5 *Les intervalles de $\mathbb{R}$ autre que $\mathbb{R}$ sont de la forme :*

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\},\,]a,b[=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\},\\
[a,b[&= \{x\in\mathbb{R}/a\leq x<b\},\,]a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a<x\leq b\},\\
[a,+\infty[&= \{x\in\mathbb{R}/a\leq x\},\,]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}/x\leq b\},\\
]a,+\infty[&= \{x\in\mathbb{R}/a<x\},\,]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}/x<b\},
\end{aligned}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1.1.7 Propriété d'Archimède

Proposition 1.4 $\mathbb{R}$ *est archimédien si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : nx \geq y.$$

Proof. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^* : nx < y$. L'ensemble $\mathcal{A} = \{nx / n \in \mathbb{N}^*\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne superieure a.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)\, x < a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, nx < a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est un majorant de $\mathcal{A}$ strictement inférieure à a et contredit le fait que a est le plus petit des majorant de $\mathcal{A}$. ■

Corollaire 1.1 *Soient x et y deux réels avec $x > 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geq y$.*

1.1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.5 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Alors $I \cap \mathbb{Q}$ est non vide ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) ainsi que $I \cap (\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q})$ ($\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).*

1.1.9 Partie entière d'un nombre réel

Définition 1.6 *Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un plus grand entier relatif noté $E[x]$, tel que $E[x] \leq x$ (c-à-d le plus grand entier inférieure ou égale à x). On l'appelle la partie entière de x.*

On a par définition :

$$E[x] \leq x < E[x] + 1.$$

Exemple 1.3 $E[2,68] = 2, E[-3,7] = -4.$

Proposition 1.6 *1. La fonction partie entière est une fonction croissante,*

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{Z}$, *on a* $E[x+i] = E[x] + i$,

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E[x] + E[y] \leq E[x+y]$,

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E[x] + E[y] + E[x+y] \leq E[2x] + E[2y]$,

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E[x] + E[y] \leq E[x+y] \leq E[x] + E[y] + 1$,

6. $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*, nE[x] \leq E[nx]$.

Proof. 1. Soit $x \leq y \in \mathbb{R}, E[x] \leq x \leq y$ et $E[x] \in \mathbb{Z}$ donc $E[x] \leq E[y]$ car $E[y]$ est le plus grand entier inférieure ou égale à y.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, donc $E[x] \leq x \leq E[x] + 1$ puis $E[x] + i \leq x + i \leq (E[x] + i) + 1$, comme $E[x] + i \in \mathbb{Z}$, on a $E[x+i] = E[x] + i$.
6. $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E[x] \leq x \leq E[x] + 1$, donc $nE[x] \leq nx$ et $E[nx]$ est le plus grand entier inférieure ou égale à nx, donc $E[nx] \geq nE[x]$, car $nE[x] \in \mathbb{Z}$.
La preuve du reste de propriétés est de même façon. ■

1.2 Propriété de la borne superieure

1.2.1 Borne superieure, borne inférieure

Définition 1.7 *1)* $(X \subset \mathbb{R}$ *non vide,* $M \in \mathbb{R}$*, est un majorant de* $X) \Leftrightarrow (M \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x \in X; x \leq M)$.
2) $(X \subset \mathbb{R}$ *non vide,* $m \in \mathbb{R}$*, est un minorant de* $X) \Leftrightarrow (m \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x \in X; x \geq m)$.
3) La borne superieure d'une parite non vide de $\mathbb{R}$ *est le plus petit majorant de* X*. Se note* $\sup X$.
4) La borne inférieure d'une parite non vide de $\mathbb{R}$ *est le plus grand minorant de* X*. Se note* $\inf X$.

Exemple 1.4 *1) L'élément* 0 *est le plus grand élément de* $]-\infty, 0]$, *et il en est aussi la borne superieure.*

2) Le zéro est une borne superieure de $X =]-3, 0[$, *mais il n'appartient pas à* X. *En effet, 0 est un majorant de* $]-3, 0[$ *et tout élément* $\alpha < 0$ *est non majorant de* $]-3, 0[$ *car* $\alpha < \frac{\alpha}{2} < 0$.

Proposition 1.7 *(Propriété de la borne superieure). Toute partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et majorée, possède une borne superieure.*

Proposition 1.8 *(Caractérisation de la borne superieure). La borne superieure* S *d'une partie non vide* X *de* $\mathbb{R}$ *est caractérisée par :*

$$(\forall x \in X, x \leq S) \ \text{ et } \ (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : S - \varepsilon < x).$$

Proposition 1.9 *(Propriété de la borne inférieure). Toute partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et minorée, possède une borne inférieure.*

Proposition 1.10 *(Caractérisation de la borne inférieure). La borne inférieure* I *d'une partie non vide* X *de* $\mathbb{R}$ *est caractérisée par :*

$$(\forall x \in X, x \geq I) \ \text{ et } \ (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : I + \varepsilon > x).$$

Exemple 1.5 *1)* $X = \left]\frac{-5}{2}, 1\right[$, *donc :* $\sup X = 1, \inf X = \frac{-5}{2}, \max X$ *et* $\min X$ *n'existent pas.*

2) $X = [-1, +\infty[$, *donc :* $\sup X$ *n'existe pas,* $\inf X = -1, \max X$ *n'existe pas et* $\min X = -1$.

1.3 Exercices corrigés

<u>EXERCICE n°1.</u>

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels tels que $x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$.

1°) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{1.1}$$

2°) Montrer que s'il existe $j, 1 \leq j \leq n$, tel que $x_j < y_j$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{1.2}$$

3°) Montrer que si $0 \leq x_i, i = 1, 2, \dots n$, (et $x_i \leq y_i$) alors

$$0 \leq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leq y_1 \cdot y_2 \cdots y_n. \tag{1.3}$$

Correction.

1°) Raisonnons par récurrence : Pour $n = 1$ on a : $x_1 \leq y_1$. Supposons que l'inégalité (1.1) est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} y_i + x_{n+1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} y_i + y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i, \end{aligned}$$

car

$$x_{n+1} \leq y_{n+1}.$$

2°) On a, d'après 1°)

$$\begin{aligned} & x_1 + \cdots + x_{j-1} + x_{j+1} + \cdots + x_n \\ \leq \ & y_1 + \cdots + y_{j-1} + y_{j+1} + \cdots + y_n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &\leq y_1 + \cdots + y_{j-1} + x_j + y_{j+1} + \cdots + y_n \\ &< \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{aligned}$$

car

$$x_j < y_j.$$

3°) De même façon que 1°).

EXERCICE n°2. Montrer que $x \in \mathbb{R}_+$ et $x \leq \varepsilon$, quelque soit ε positif, alors $x = 0$.

Correction. Considérons $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on a par hypothèse $x \leq \varepsilon$, d'où x est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$. Mais l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathbb{R}_-$. On en déduit alors, que $x \in \mathbb{R}_-$ et comme par hypothèse $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x = 0$.

EXERCICE n°3. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, telles que $A \subset B$. Montrer que

1°) Si B est majorée alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq \sup B$.

2°) Si B est minorée alors $\inf A$ existe et $\inf A \geq \inf B$.

3°) Donner des exemples où dans (1°) (respectivement dans (2°)) on aura l'égalité, l'inégalité stricte.

Correction.

1°) B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée, elle admet une borne superieure $\sup B$, et comme $A \subset B$, donc tout majorant de B (en particulier $\sup B$) est un majorant de A. A est donc est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée, elle admet une borne superieure $\sup A$. Comme $\sup B$ est un majorant de A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, alors $\sup A \leq \sup B$.

2°) Même méthode que 1°).

3°) L'exemples :

– Si $A = [1,3]$ et $B =]-\infty, 3[$ on a $\sup A = \sup B = 3$.

– Si $A = [1,3]$ et $B =]-\infty, 5[$ on a $\sup A = 3 < \sup B = 5$.

– Si $A = [1,3]$ et $B = [1, +\infty[$ on a $\inf A = \inf B = 1$.

– Si $A = [1,3]$ et $B = [-1, +\infty[$ on a $1 = \inf A > \inf B = 1$.

EXERCICE n°4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées.

1°) Montrer que si pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leq b$, alors

$$\sup A \leq \inf B.$$

2°) Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et

$i)$ $\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B)$,

$ii)$ $\inf (A \cup B) = \min (\inf A, \inf B)$.

3°) Montrer que $A \cap B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que si $A \cap B \neq \emptyset$ alors

$i)$ $\sup (A \cap B) \leq \min (\sup A, \sup B)$,

$ii)$ $\inf (A \cap B) \geq \max (\inf A, \inf B)$.

4°) Montrer que si $A + B = \{a + b / a \in A \text{ et } b \in B\}$ alors $A + B$ est borné et

$i)$ $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$,

$ii)$ $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$.

5°) Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}_+$ et $A \cdot B = \{ab/a \in A \text{ et } b \in B\}$ alors

$i)$ $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,

$ii)$ $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

Correction.

1°) $\forall a \in A, \forall b \in B; a \leq b$, donc tous les éléments de B majorent A et comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, alors $\sup A \leq b$, $\forall b \in B$. Ce qui donne que $\sup A$ est un minorant de B et comme $\inf B$ est le plus grand des minorants de B, on aura $\sup A \leq \inf B$.

2°) $i)$ Comme A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et bornées, alors $\sup A, \inf A, \sup B, \inf B$ existent.

On a $B \subset A \cup B$, on déduit (d'après Exo 3) que :

$$\sup B \leq \sup(A \cup B).$$

On a $A \subset A \cup B$, donc

$$\sup A \leq \sup(A \cup B).$$

Ce qui implique que

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B). \tag{1.6}$$

Pour $\forall c \in A \cup B$ on a

$$\begin{cases} c \in A \Rightarrow c \leq \sup A, \\ \qquad\text{ou} \\ c \in B \Rightarrow c \leq \sup B, \end{cases}$$

donc

$$c \leq \max(\sup A, \sup B), \forall c \in A \cup B,$$

c-à-d, $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ et comme $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorantd de $A \cup B$. Alors

$$\sup (A \cup B) \leq \max (\sup A, \sup B) . \tag{1.7}$$

De (1.6) et (1.7) on a l'égalité.

– Par la même méthode, on répond à le rest des questions.

EXERCICE n°5. Soient x et y deux nombres réels. Montrer que

1°) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$,

2°) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$,

3°) $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

Correction.

1°) On a :

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x|, \\ &\text{et} \\ -|y| &\leq y \leq |y|, \end{aligned}$$

donc

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

ce qui donne

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

On a aussi

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| .$$

2°) Utilisant le fait que $|x| = |x + -y + y|$, $|y| = |y - x + x|$ et l'inégalité triangulaire.

3°) En utilisant le fait que la fonction

$$z \mapsto \frac{z}{1+z},$$

est croissante sur $[0,+\infty[$. Comme

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\
&\leq \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\
&\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.
\end{aligned}$$

EXERCICE n°6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'égalité suivante :*

1. $E\left[\frac{E[nx]}{n}\right] = E\,[x]\,.$
2. $E\left[\frac{x}{2}\right] + E\left[\frac{x+1}{2}\right] = E\,[x]\,.$

Correction.

1. On a : $E\,[nx] \leq nx$ donc $\frac{E[nx]}{n} \leq x$ et d'après le fait que la fonction partie entière est croissante :

$$E\left[\frac{E\,[nx]}{n}\right] \leq E\,[x]\,. \tag{1.8}$$

D'autre part, on a : $E\,[x] \leq x$ donc $nE\,[x] \leq nx$ ou encore $E\,[nE\,[x]] \leq E\,[nx]\,.$

Puisque $nE\,[x]$ est un entier, alors $E\,[nE\,[x]] = nE\,[x]$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
E\,[x] &\leq \frac{E\,[nx]}{n} \\
E\,[x] &\leq E\left[\frac{E\,[nx]}{n}\right].
\end{aligned} \tag{1.9}$$

D'après (1.8) et (1.9), on obtient l'égalité.

2. Comme $E\left[x\right] \in \mathbb{N}$, on suppose que

$a)$ $E\left[x\right] = 2i + 1$.

On a : $2i + 1 \leq x < 2i + 2 \Rightarrow i + \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < i + 1 \Rightarrow E\left[\frac{x}{2}\right] = i$.

0n a aussi $2i + 2 \leq x + 1 < 2i + 1 + 2 \Rightarrow i + 1 \leq \frac{x+1}{2} < i + 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow E\left[\frac{x+1}{2}\right] = i + 1$.

Ce qui implique que

$$E\left[\frac{x}{2}\right] + E\left[\frac{x+1}{2}\right] = i + i + 1 = E\left[x\right].$$

$b)$ $E\left[x\right] = 2i$. De même façon.