Université Med Khider Biskra

Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques ANNEE: 2015/2016
1^{er} ANNEE MI Module **Analyse 2**

SERIE N° 01

EXERCICE 01.

i) En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales :

$$1)\int_0^1 \left(x^2-1\right)dx \qquad 2)\int_0^x \left(e^t+t\right)dt \qquad 3)\int_{-1}^1 \left(5x^2+x+2\right)dx \ \textbf{(ex).}$$

ii) Soit la f fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, on a :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels. Soit n un entier strictement positif. Pour $i=1,2,...,n,$, on pose $a_i=\dfrac{i}{n}$.

1. Montrer que pour tout $i=1,...,n$, il existe x_i et y_i dans $[a_{i-1},a_i]$ tels que $f(x_i)=1$ et $f(y_i)=0$.

2. On considère les deux subdivisions pointées $P_1=\{([a_{i-1},a_i],x_i)\}_{1\leq i\leq n}$ et $P_2=\{([a_{i-1},a_i],y_i)\}_{1\leq i\leq n}$. Montrer que $S_{P_1}(f)=1$ et $S_{P_2}(f)=0$. On rappelle que

$$S_P(f)=\sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\alpha_i)(\alpha_i-\alpha_{i-1}) \quad \text{pour} \quad P=\{([a_{i-1},a_i],a_i)\}_{1\leq i\leq n}$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable.

EXERCICE 02. Calculer les primitives suivantes:

$$\int (2x^3+\cos 2x-\frac{1}{5}x)dx \quad ,\int \frac{x}{5\sqrt{x^2+2}}dx \quad ,\int \frac{1}{x^2-1}dx$$
$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \ \textbf{(ex)}. \quad ,\int (\frac{3}{\cos^2 x}+x)dx \ \textbf{(ex)}$$

EXERCICE 03. Calculer par parties les primitives suivantes :

$$\int (x+2)\cos x dx \quad ,\int \sin x\cdot e^x dx \quad ,\int \frac{\arctan x}{x^2+1}dx \quad ,\int x^2\ln x dx$$
$$\int (x^2-3)chx dx \quad \int x\sin^3 x dx, \quad ,\int \frac{x}{\cos^2 x}dx \ \textbf{(ex)} \quad ,\int \arctan x dx \ \textbf{(ex)}.$$
$$\int (\ln x)^2 dx \ \textbf{(ex)} \quad ,\int \arctan x dx \ \textbf{(ex)}$$

EXERCICE 04. Calculer par changement de variable les primitives suivantes:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx \quad , \int \frac{-1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx \quad , \int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$$

$$\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}dx \quad , \int \frac{(\ln x)^n}{x}dx \ \textbf{(ex)} \quad , \int \left(1+\tfrac{1}{x^2}\right)\arctan x dx \ \textbf{(ex)}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx \ \textbf{(ex)} \quad , \int cox\left(\sqrt{x}\right)dx, \quad , \int \frac{1}{7+\tan x}dx \ \textbf{(ex)}$$

EXERCICE 05. Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes:

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2-1)}dx \quad , \int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad , \int \frac{x^3}{x^2-4}dx$$

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^3}dx \quad , \int \frac{1}{x^2-1}dx \ \textbf{(ex)} \quad , \int \frac{x^3+2}{(x+1)^2}dx \ \textbf{(ex)}$$

$$\int \frac{4x}{(x-2)^2}dx \ \textbf{(ex)} \quad , \int \frac{4x^2}{x^4-1}dx \ \textbf{(ex)}. \quad , \int \frac{4x^2}{x^4-1}dx \ \textbf{(ex)}.$$

EXERCICE 06. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C_b^1. Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

EXERCICE 07. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Si $x > 0$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.