

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**Université Mohamed Khider de Biskra**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**

## **Transfert de chaleur et de masse**

*Guide pratique pour la modélisation de la convection de double  
diffusion; Application au Séchage*

**Filières :**

**Génie Mécanique**  
**Génie des procédés**  
**Ingénierie des Transports**

**Dr. Adnane LABED**

Le présent document consiste à donner un aperçu sur le transfert de chaleur et de masse et les équations de bilans en relation. Il s'agit d'un guide de calcul, par la méthode des volumes finis, de la convection de double diffusion dans (enceinte fermée, phénomène de séchage). Il est destiné aux étudiants de fin de cycle (Master II) qui préparent un mémoire dans le même sujet.

Ce polycopié peut servir comme support de cours de la matière "Transfert de chaleur et de masse " destiné principalement aux étudiants de la spécialité Energétique de la filière génie Mécanique, et il peut être utile à d'autres spécialités du domaine des Sciences et Technologie (ST).

Le contenu de ce document est largement inspiré des documents et sources cités dans la liste des références bibliographiques.

# ***INTRODUCTION***

---

## I- Introduction

---

Depuis plus d'un siècle, les phénomènes de transfert de chaleur et de masse ont fait l'objet d'une imposante littérature, couvrant des domaines aussi variées que la météorologie, l'électronique, les fours ou l'industrie agroalimentaire [1], un aspect parmi les plus déterminants, dans l'appréhension des phénomènes de convection naturelle. Au cours de ces vingt dernières années, est certainement l'évolution des méthodes et des moyens numériques qui ont pris une place de plus en plus importante en qualité d'outil, aussi bien dans le domaine de la recherche que des applications industrielles.

La convection naturelle thermosolutale trouve de multiples applications dans divers domaines de l'industrie. De plus, ces dernières années, elle a acquis un important regain d'intérêt suite aux développements technologiques des procédés de fabrication qui nécessitent de connaître avec précision les quantités d'énergies échangées dans les diverses parties du système.

Bien que la convection naturelle dans des espaces fermés de forme parallélépipédique intervienne dans de nombreuses applications industrielles, elle n'a fait l'objet d'études que durant cette dernière moitié du siècle (*Batchelor 1954*) [2] en raison de sa complexité, et du manque de moyen de calcul numérique.

Les travaux sur la convection dans de telles configurations se différencient principalement par la géométrie de la cavité, le régime d'écoulement considéré, le type de conditions aux limites imposées sur les parois de la cavité et la nature du milieu qu'elle renferme.

---

Ce polycopié de cours consiste à analyser le phénomène de convection naturelle thermosolutale dont le caractère mixte température/concentration se reflète au système d'équation à résoudre. En effet i-ci se compose des équations de Navier-Stokes. Quant à double diffusion, elle se distingue par l'augmentation du nombre de grandeurs caractéristiques régissant le mouvement.

Nous allons donc tenter, par ce polycopié, de fournir une ossature à la prédiction des transferts de chaleur et de masse et des structures convectives qui se développent au cours de ce phénomène. A cette fin, nous allons donner une idée globale sur les groupements caractéristiques qui gèrent une telle configuration et les échanges thermique et massique qui résultent de cette convection.

Ce polycopié est principalement centré sur la modélisation de l'écoulement convectif et la dynamique des transferts de chaleur et de masse, en général en situation de convection dominante. Les écoulements étudiés possèdent en commun d'être provoqués par des inhomogénéités spatiales des constituants transportés par l'intermédiaire de forces d'Archimède thermiques ou massiques, ainsi que par des frottements visqueux pariétaux dus à des cisaillements mécaniques ou à des forces de tension de surface. Cette spécificité a pour conséquence un couplage très fort entre écoulement et transfert, ce qui impose des contraintes spécifiques aux méthodologies utilisées, numériques en particulier. Ces études s'articulent autour de deux objectifs, l'un à caractère fondamental, l'autre à caractère plus appliqué.

# **ANALYSE THEORIQUE GENERALE**

---

## *II- Analyse théorique générale*

### *Ecriture des équations de Bilans*

---

#### **II-1 Introduction :**

La convection naturelle thermosolutale résulte de la combinaison simultanée d'un gradient thermique et d'un gradient massique se caractérise par l'augmentation du nombre d'équations à résoudre et l'introduction de nouvelles grandeurs caractéristiques telles que le nombre de *Schmidt* ( $Sc$ ), le nombre de *Lewis* ( $Le$ ) et le nombre de *Rayleigh* massique ( $Ra_c$ ), ce qui a pour conséquence de compliquer encore plus l'investigation de ce type de problème ainsi que l'évaluation des échanges thermiques et massiques. C'est la raison pour laquelle ce sujet n'a été abordé que tardivement par rapport à la convection thermique (*Ostrach 1980*) [2].

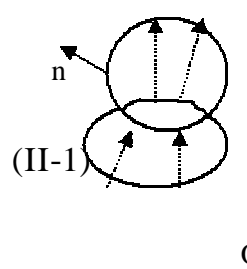
La convection thermosolutale se caractérise principalement par les quatre cas extrêmes de prédominance décrits par *Trevinsan et Al.(1985)* [3] et qui sont directement liés aux divers couplages possibles entre le rapport des forces volumiques d'Archimède et le nombre de *Lewis*.

Les équations générales de la convection et l'écoulement d'un fluide peuvent être déduites soit sous forme intégrale, soit sous forme locale, d'une seule équation générale de bilan.

Nous allons considérer les phénomènes physiques, les lois fondamentales et les formulations mathématiques importantes dans les procédés du mouvement du fluide et de transmission de la chaleur et de la matière dans un domaine matériel  $D$ .

**II-2. Ecriture des équations de base à partir des méthodes de bilans :**

Toutes les équations de base se déduisent à partir de *bilans sur des volumes de contrôle* des grandeurs essentielles : masse, quantité de mouvement. Le théorème de *Leibnitz* (II-1) est l’outil qui permet de formuler ces bilans [18] :



$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \int_S f(V_i \cdot n) dS$$

(II-1)

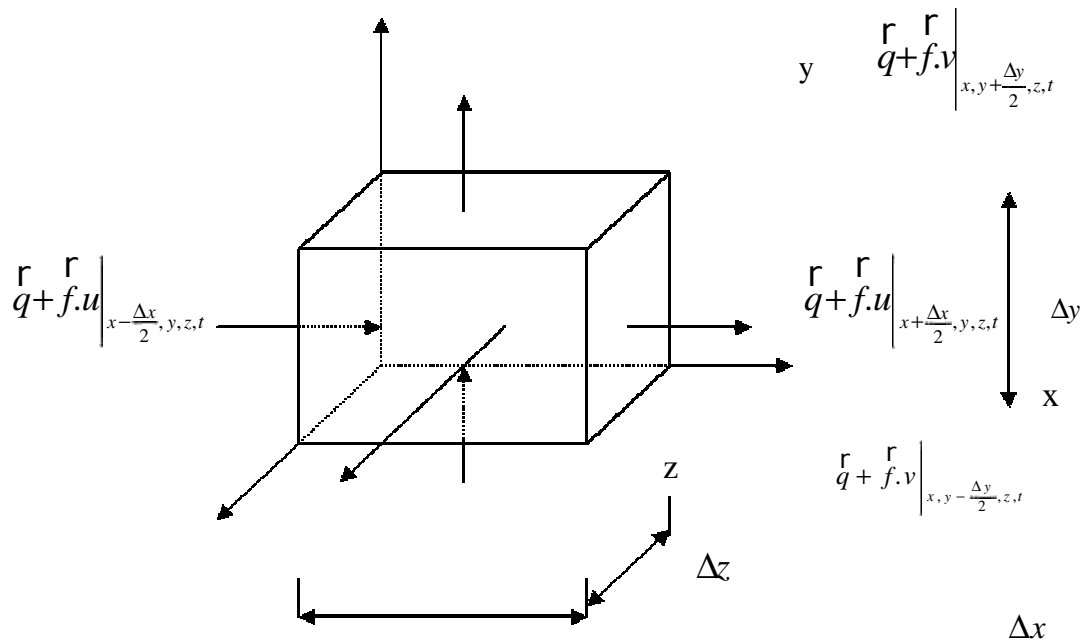
Les équations générales de la convection thermique peuvent être déduites, soit sous forme intégrale, soit sous forme locale, d’une seule équation générale de bilan.

Soit (*D*) un domaine matériel, de dimensions finies et de frontière (*S*) fixe (Fig.II.1).

Ce domaine est parcouru par la matière dont les caractéristiques, masse, quantité de mouvement et énergie feront l’objet d’un bilan dans le domaine (*D*) pendant une durée (*dt*).

Si on note :  $f = f(x,y,z,t)$  ; une grandeur physique : (la densité volumique locale de masse, quantité de mouvement ou d’énergie...), tel que le flux de la grandeur (*f*) transporté à travers la frontière du volume de contrôle à la vitesse  $V_i$ .





**Fig :II-1.** présentation du flux dans un volume de contrôle.

$V$  : le vecteur de la vitesse.

$O$  : le volume.

$q_v$ : débit volumique.

$q_s$ : débit surfacique.

$u, v, w$  les composantes de  $V$ .

$n$ : vecteur unitaire normal à  $S$ , est orienté vers l'extérieur de  $S$ .

- Cas où  $f$  est une grandeur scalaire :

On établit le bilan intégrale sur ( $O$ ) de  $f$  comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega = \int_{\Omega} q_v \cdot d\Omega - \int_S q_s \cdot dS - \int_S f \cdot \overset{r}{V} \cdot \overset{r}{n} \cdot ds \quad (\text{II-2})$$

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot dv \equiv$  représente la variation de la quantité totale contenue dans

$O$  à l'instant  $(t)$ .

$\int_{\Omega} q_v d\Omega \equiv$  représente le débit total volumique des sources dans  $(O)$ .

$\int_S q_s dS \equiv$  représente le flux (la densité de flux) total des sources

surfacciques sur  $(S)$ .

$\int_S f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS \equiv$  représente le flux total lié au mouvement du support

matériel à travers  $(S)$ .

En regroupant les termes sources dans le second membre, l'équation (II-2) est écrite sous la forme suivante [19] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega + \int_S f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\Omega} q_v \cdot d\Omega - \int_S q_s \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{II-3})$$

la normale  $\vec{n}$  à  $dS$  est orientée comme d'habitude vers l'extérieur du domaine  $D$ .

Le terme  $q_v$  est compté  $> 0$  pour une source *stricto sensu* et  $< 0$  pour un puits. En ce qui concerne  $q_s$ , on introduit un « vecteur densité de flux » des sources sur  $S$  en posant :  $q_s = q_s \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  normale extérieure). On a donc :

$$q_s > 0 \text{ à la sortie et } < 0 \text{ à l'entrée.} \quad (\text{II-4})$$

En utilisant le théorème « flux-divergence » :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(f \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} q_v \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}(q_s) d\Omega \quad (\text{II-5})$$

si  $f$  est continue, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \cdot \vec{V}) = q_v - \text{div}(q_s) \quad (\text{II-6})$$

**Cas où  $f$  est un vecteur :**

Lorsque l'entité physique faisant l'objet d'un bilan est de nature vectorielle, la transposition du cas précédent est aisée [fluide en écoulement]:

- Le débit volumique des sources est une grandeur vectorielle  $\vec{q}_v$
- Il en est de même pour le débit des sources surfaciques :  $\vec{q}_s$
- La densité de flux transporté à travers  $S$  par le mouvement de matière est  $f \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n})$ .

**Les conventions de signes (II-4) n'étant indispensables que pour les scalaires, elles n'ont plus de nécessité ici, le bilan intégral s'écrit :**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega + \int_S f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\Omega} \vec{q}_v \cdot d\Omega + \int_S \vec{q}_s \cdot dS \quad (\text{II-7})$$

En utilisant le théorème « flux-divergence » :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(f \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{q}_v \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\vec{q}_s) d\Omega \quad (\text{II-8})$$

en fin la forme locale est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(f) + \text{div}(f \cdot \mathbf{V}) = \overset{\mathbf{r}}{q}_v + \text{div}(\overset{\mathbf{r}}{q}_s) \quad (\text{II-9})$$

### II-2-1. Bilan de masse totale :

Si, dans l'équation (II-1), la grandeur  $f$  est la masse volumique (notée  $\rho$ ), puisque il ne peut avoir de source de masse, en vertu le principe de la conservation de masse totale ; donc :

$$q_v = 0, \quad q_s = 0$$

alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \int_S \rho (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}) \, dS = 0 \quad (\text{II-10})$$

et l'équation du bilan local s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\mathbf{V}) = 0 \quad (\text{II-11})$$

cette dernière équation est dite aussi : « l'équation de continuité ». [19]

### II-2-2. Bilan de la quantité de mouvement :

Il s'agit d'une grandeur vectorielle ; d'après la loi fondamentale de la dynamique, les source de quantité de mouvement sont les forces appliquées au système elles se divisent en deux catégo [18] :

(a) *Les forces de volumes*, représentées par un champ continu (dans notre cas, la force de pesanteur :  $\overset{\mathbf{r}}{q}_v = \rho \cdot \mathbf{g}$ ).

(b) *Les forces de surface* représentées par un champ de contraintes de surface et de pression ; résultante des actions de contact sur la surface  $S$  avec le fluide alentour. Cette force peut encore être notée [19]:

$$dF = s \cdot n \cdot dS \quad (\text{II-12})$$

Il est donc facile de se rendre compte à partir de l'équation (II-12) et que la pression intervient uniquement sur la diagonale du tenseur des contraintes :

$$s_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + t_{ij} \quad (\text{II-13})$$

$\delta$  est le symbole de Kronecker. Le terme  $t_{ij}$  tient compte des frottements internes, caractérisés par la viscosité du fluide.

$$t_{ij} = m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + m' \text{div} \cdot (V) \delta_{ij} \quad (\text{II-14})$$

où :  $u_i$  représente la composante de la vitesse selon la direction  $x_i$ .

La *viscosité dynamique*  $\mu$ , et le coefficient de seconde viscosité  $\mu'$ , sont des propriétés physiques du fluide. (Si le fluide est incompressible  $m' \text{div} \cdot (V) \delta_{ij} = 0$ )

Revenant à la résultant des actions de contact sur la surface de contrôle ; la composante selon  $x_i$  s'écrit :

$$\int_S s_{ij} \cdot n_{uj} \cdot dS = \int_S (-P n_i + t_{ij} \cdot n_j) dS$$

Alors cette force peut s'écrire, en notation vectorielle :

$$F_{\text{contact}} = \int_S s \cdot n \cdot dS = \int_S (-P n + t \cdot n) dS$$

Nous identifions la grandeur  $f$  à  $\rho V$  (quantité de mouvement) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \cdot V \cdot d\Omega + \int_S \rho \cdot V \cdot (V \cdot n) dS = \int_D \rho \cdot g \cdot d\Omega + \int_S (-P \cdot n + t \cdot n) dS \quad (\text{II-15})$$

d'après l'équation (II-9) on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \rho \cdot \mathbf{V} \cdot d\Omega + \int_D \rho \cdot \mathbf{V} \cdot \text{div}(\mathbf{V}) d\Omega = \int_D \rho \cdot \mathbf{g} \cdot d\Omega + \int_D -\text{grad} \cdot P \cdot d\Omega + \int_D \text{div} \cdot \mathbf{t} \cdot d\Omega \quad (\text{II-16})$$

Si le champ de  $\mathbf{V}$  est continu, on obtient l'équation du bilan local :

$$\rho \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \cdot \mathbf{V} \cdot \text{div}(\mathbf{V}) = -\text{grad}(P) + \text{div}(\mathbf{t}) + \rho \cdot \mathbf{g} \quad (\text{II-17})$$

cette équation est appelée aussi l'équation de « Navier-Stokes ».

$\text{div}(\mathbf{t})$  est un vecteur dont la composante selon la direction  $x_i$  est :  $\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$

L'équation (II-17) peut être écrite sous forme compacte comme suit :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{V} \right] = -\nabla P + m \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \cdot \mathbf{g} \quad (\text{II-18})$$

### II-2-3. Bilan d'énergie :

La grandeur considérée est maintenant l'énergie contenue dans  $D$  (l'énergie interne plus l'énergie cinétique), alors :

- L'énergie volumique est donnée par :  $C = \rho \cdot e + \rho \cdot \frac{\mathbf{V}^2}{2}$ .

Où :  $e$  désigne l'énergie interne par unité de masse.

- Le débit volumique constitué par la puissance :

$$\mathbf{q}_v = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} + P$$

il présente ici, les forces de pesanteur et la puissance calorifique ( $P$ ) par unité de volume, dégagée ou absorbée à l'intérieur de ( $O$ ) par l'effet d'une réaction chimique, courant électrique, ...etc.

- Densité de flux de source de surface :

$$\vec{q}_s \cdot \vec{n} = -l \cdot \overrightarrow{\text{grad}(T)} \cdot \vec{n} + q^m.$$

est la somme de puissance des force de vitesse et de la densité de flux de chaleur traversant ( $S$ ). « loi de Fourier.. ». [19]

Le bilan intégral d'énergie est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (r \cdot e) \cdot d\Omega + \int_S r \cdot e \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \int_{\Omega} P \cdot d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot d\Omega + \int_S l \cdot \text{grad}(T) \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (\text{II-19})$$

$$\int_{\Omega} P \cdot d\Omega \equiv \text{La puissance thermique.}$$

$$\int_{\Omega} f \cdot d\Omega \equiv \text{Fonction de dissipation d'énergie par force locale des}$$

forces de viscosité.

L'équation de bilan local d'énergie est obtenue d'après (II-19) en utilisant le théorème « flux-divergence » :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot e) + \text{div}(r \cdot e \cdot \vec{V}) = P + f + \text{div}(l \cdot \text{grad}(T)) \quad (\text{II-20})$$

Dans les applications à « Thermoconvection », on cherche le plus souvent à relier le champ de température dans le fluide au champ des vitesses, de manière à faire intervenir directement de grandeurs mesurables, il est donc nécessaire de faire apparaître la température ( $T$ ) dans l'équation d'énergie. Cette opération sera réalisée en posant par l'intermédiaire de l'enthalpie massique «  $h$  ». [19]

$$h = e + \frac{P}{r} .$$

soit :  $\rho \cdot e = \rho \cdot h - P$ .

En remplaçant dans l'équation (II-20).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot h) - \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot h \cdot \vec{V}) - \text{div}(P \cdot \vec{V}) = P + f + \text{div}(l \cdot \text{grad}(\vec{T})) \quad (\text{II-21})$$

Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot h) + \text{div}(\rho \cdot h \cdot \vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial t} + P + f + \vec{V} \cdot \text{grad}(P) + \text{div}(l \cdot \text{grad}(\vec{T})). \quad (\text{II-22})$$

En développant l'équation (II-14), on trouve :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} h + h \frac{\partial}{\partial t} \rho + h \cdot \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) + \rho \cdot \vec{V} \cdot \text{grad}(h) = \frac{\partial P}{\partial t} + P + f + \vec{V} \cdot \text{grad}(P) + \text{div}(l \cdot \text{grad}(\vec{T})).$$

(II-23)

L'enthalpie dépend du temps et des coordonnées d'espace  $(x, y, z)$ , par l'intermédiaire de  $(T)$  et  $(P)$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \\ \text{et } \text{grad}(h) = \frac{\partial h}{\partial T} \text{grad}(T) + \frac{\partial h}{\partial P} \text{grad}(P). \end{array} \right. \quad (\text{II-24})$$

d'autre part, en thermodynamique il nous sont données relations suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial T} = c_p : \text{chaleur massique à pression constante.}$$

$$\frac{\partial h}{\partial P} = \frac{1}{r} (1 - b \cdot T), \quad b \equiv \text{coefficient de dilatation volumique à pression}$$

constante.

$$\text{Par définition : } b = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial T} \right]_{P=\text{cst}}$$



Donc on peut écrire :  $dh = c_p \cdot dT + \frac{1}{r}(1-bT)dP$

En remplaçant ces relations dans l'équation (II-21), on aura alors l'équation de bilan qui relie la distribution de la température au mouvement du fluide [19]:

$$r \cdot c_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{T}) \right) = bT \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{P}) \right) + P + f + \text{div}(l \cdot \text{grad}(\vec{T})).$$

(II-25)

$$\Leftrightarrow r \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} = b \cdot T \cdot \frac{DP}{Dt} + P + f + \text{div}(l \cdot \nabla T) \quad (\text{II-26})$$

A cette dernière relation, doivent être associées, les conditions aux limites appropriées au problème physique à traiter. Il s'agit de la :

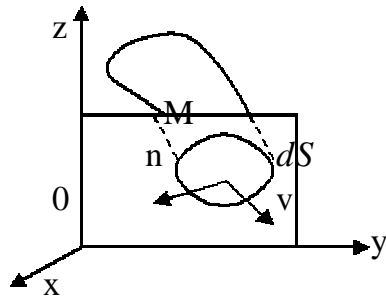
- Condition de DIRICHLET dans son cas général :  $T$  est connue sur la frontière,
- Condition de NEUMANN (homogène) dans son cas particulier :

$$k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s = 0 \quad (\text{pas d'échange avec l'extérieur}).$$

- Condition de FOURIER :  $-k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s = q_0$  ,(le flux de chaleur échangé est connu).
- Condition de NEWTON :  $q = h_c \cdot (T_s - T_f)$ , cas d'un flux de chaleur échangé par convection avec une zone de température ambiante),... [20]

### II-2-4. Notions fondamentales sur la convection thermique :

La convection thermique est un *transfert d'énergie par rapport à un repère donné, consécutif à un transport macroscopique de masse dans ce repère.*



**Figure II-2.** débit de masse à travers  $dS$

Considérons l'écoulement d'un fluide ou plus précisément un tube de flux élémentaire, c'est à dire un tube auquel les lignes de vitesse sont tangentes (fig.II-2). Ce tube de flux coupe un plan quelconque (par exemple  $Oyz$ ), d'un repère suivant une surface élémentaire  $dS$  autour d'un point  $M$

$dS$  est dotée d'une normale orientée  $\mathbf{n}$ . On a un débit de masse à travers  $dS$ , noté  $dm^*$  donné par [21]:

$$d\dot{m} = r(r) V \cdot n dS$$

(II-27)

où  $r(r)$  désigne la masse volumique et  $V$  la vitesse locale du fluide par rapport à la surface  $d\Sigma$  de  $Oyz$ .

A ce transfert macroscopique de masse est associé un transfert d'enthalpie caractérisé par un flux convectif  $d\Phi^{cv}$  en  $M$  par rapport à  $Oyz$  :

$$d\Phi^{cv} = r(r) V \cdot n h (T(r)) dS = dm^* h \quad (\text{II-28})$$

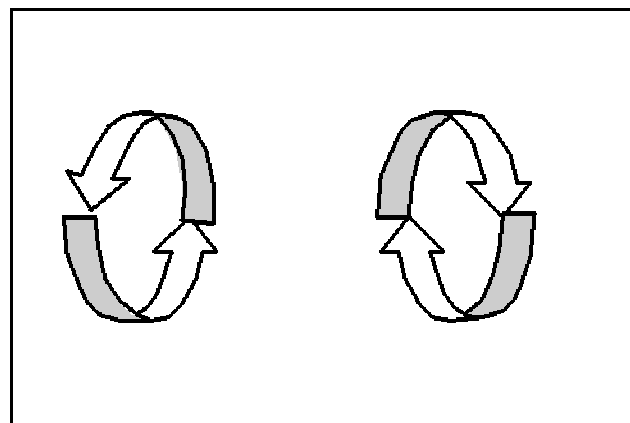
et un vecteur flux surfacique convectif:

$$\mathbf{q}^{cv} = r V h \text{ tel que: } \mathbf{f}^{cv} = r V \cdot n h \quad (\text{II-29})$$

où  $h$  désigne l'enthalpie massique locale du fluide en  $M$  rapportée à une origine arbitraire des températures. On distingue traditionnellement trois types de convection dans le cas d'un fluide :

- La **convection forcée** se produit quand le mouvement du fluide est imposé par une intervention extérieure au système : c'est le cas des échangeurs industriels, des « radiateurs » de voiture (qui sont essentiellement des convecteurs...): deux fluides en mouvement échangent alors de l'énergie à travers une paroi dont a température diffère des leurs. Comme les vitesses d'écoulement peuvent atteindre des valeurs très élevées, le transfert par convection forcée est souvent extrêmement efficace.
- La **convection naturelle** (ou convection libre) apparaît spontanément, sous certaines conditions, dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température imposé en général par le milieu extérieur. Prenons comme exemple une pièce dont le plancher est plus chaud que le plafond (chauffage par le sol). L'air chaud au voisinage du plancher, moins dense que l'air froid proche du plafond, va monter sous l'effet d'une force d'Archimède, tandis que l'air froid va descendre (figure II-3). [21]

*Plancher froid*



*Plancher chaud*

**Figure II-3** : Mouvement de l'air sous l'effet d'une force d'Archimède

L'écoulement va être freiné par les force de frottement visqueuses et l'écart de température, cause du phénomène va être amoindri par conduction thermique ; sous l'effet de deux forces antagonistes (d'Archimède et de frottement), le fluide peut atteindre sous certaines conditions une vitesse limite conduisant en tout point à un écoulement stationnaire.

Notons que la conduction est un phénomène dissipatif qui s'oppose à la convection naturelle. La convection naturelle est en général beaucoup moins efficace que la convection forcée (qui aurait lieu dans l'exemple précédent si on utilisait un ventilateur dans la pièce).

Cet écoulement fait passer de l'énergie du plancher au plafond : ce transfert est évidemment beaucoup plus important qu'un transfert purement conductif dans l'air immobile (dont la conductivité est très faible). On est cependant souvent obligé de se limiter à un transfert par convection naturelle,

Dans de nombreuses applications pour raisons techniques ou économiques (coût ou fiabilité) : on utilise alors des ailettes qui augmentent la surface d'échange entre le fluide et le système : refroidissement de pompes, de gros transformateurs, d'éléments électriques.

La **convection mixte** correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convections naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convection sont, considérées séparément, du même ordre de grandeur.

---

Quel que soit le type de convection considéré on distingue, suivant la vitesse du fluide deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent. Il est exclu, dans cette partie introductive, d'étudier ces régimes de façon détaillée. Nous nous limiterons à une très sommaire description qualitative.

Considérons un écoulement dans un tube transparent de section constante et supposons qu'on puisse suivre par les trajectoires (particules en suspension, filets d'encre...) les évolutions d'éléments matériels macroscopiques de ce fluide :

- à faible vitesse, l'écoulement se fait de façon ordonnée, parallèlement aux génératrices du tube, sans brassage du fluide : un mince filet d'encre ne s'étale pas sensiblement. Le régime est laminaire. À tout point, on peut définir de façon déterministe la vitesse et la température du fluide.

- si la vitesse croît, le type d'écoulement change totalement, à partir d'une vitesse critique  $V_c$  (qui dépend de la nature du fluide, du diamètre du tube, voire de la rugosité des parois).

Les filets d'encre sont animés par des mouvements tourbillonnaires de caractère aléatoire ; le mouvement du fluide se fait à trois dimensions, avec un brassage important qui favorise les échanges thermiques, comme il accélère la répartition du colorant dans tout le fluide. Le régime est alors **turbulent**. Il n'est pas possible de prédire la vitesse et la température d'un élément de fluide à un instant donné : seules les valeurs moyennes temporelles de la température et de la vitesse peuvent être connues, en général.

Dans un problème de convection, il est nécessaire de déterminer à la fois les champs de vitesse et de température pour déterminer les flux d'énergie échangés dans le système.

Nous avons, à titre indicatif, regroupé dans la tableau (II-1) les ordres de grandeur des valeurs atteintes par le coefficient de transfert convectif  $h$ , suivant le type de convection, la nature du fluide et le régime d'écoulement. Le cas d'échanges biphasiques est également abordé. [21]

Type de transfert	Fluide	$h(\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1})$
Convection naturelle	Gaz	5 – 30
	Eau	100 - 1000
Convection force	Gaz	10 – 300
	Eau	300 – 12000
	Huile	50 – 1700
	Métal liquid	6000 – 110000
Changement de phase	Ebullition	3000 – 60000
	Condensation	5000 – 110000

**Tableau II-1 :** Ordre de grandeur des coefficients de transfert convectif ( $h$ )[21]

### II-2-5. Bilan de concentration chimique :

La concentration d'un constituant dans un mélange fluide peut être exprimée de plusieurs manières : (concentration massique  $\rho_i$ , molaire  $m_i$ , fraction molaire  $m_i/m$ , et finalement la fraction massique  $c_i$ ).

Dans notre cas on exprime la concentration par la fraction massique  $c_i = \rho_i/\rho$ . Donc, la fraction massique de l'espèce  $i$  est la masse de l'espèce  $i$  divisée par la masse totale du mélange.

Dans un mélange, les espèces se déplacent à des vitesses différentes. Si  $U_i$  est la vitesse du corps  $i$  par rapport à un repère stationnaire, la vitesse massique moyenne est définie comme suit [22] :

$$U = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \cdot U_i}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

Le flux massique à travers une surface de référence immobile perpendiculaire à l'écoulement est  $q_u$ .

La vitesse de diffusion : est la vitesse d'un corps par rapport à la vitesse moyenne ( $u_i - u$ ).

Le flux massique (d'un corps) à travers une surface fixe dans l'espace est :

$$q_i = u_i \cdot c_i$$

et le flux massique par rapport à la vitesse massique moyenne est :

$$J_i = c_i (u_i - u)$$

ces deux flux sont liées par la relation :

$$q_i = J_i + u_i \cdot c_i = J_i + c_i \cdot u$$

Comme la loi de « *Fourier* », qui exprime une relation linéaire entre le flux de chaleur et le gradient de température, la loi de « *Fick* » est aussi, une relation linéaire entre le flux massique par rapport à la vitesse massique moyenne et le gradient de concentration.

Pour notre cas, la loi de « *Fick* » s'écrit :

$$J_i = c_i (u_i - u) = -D \cdot \text{grad}(c_i)$$

Avec ; la diffusivité  $D$  est constante.

Donc le bilan intégrale est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D r_i \cdot d\Omega + \int_S r_i \cdot c_i \cdot (V \cdot \vec{n}) ds = \int_D R_i \cdot d\Omega - \int_S r_i \cdot D \cdot \text{grad}(c_i) dS \quad (\text{II-30})$$

avec :  $\int_D R_i \cdot d\Omega =$  le taux de génération d'un constituant (espèce)

chimique par unité de volume.

La valeur de  $(R_i)$  (négative ou positive) : dépend de la nature du réaction. Dans le cas d'aucune réaction chimique,  $(R_i)$  est égale à zéro.

L'équation de bilan local (de la conservation de l'espèce chimique), est obtenue d'après (II-30) en utilisant le théorème « *flux-divergence* » [22] :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \cdot C_i) + \text{div}(r \cdot C \cdot V) = r \cdot \text{div}[D \cdot \text{grad}(C_i)] + R_i \quad (\text{II-31})$$



**Références :**

- [1]. **ALLARD (F.), DRAOUI (A.) et BEGHEIN (C.)**—« *Quelques phénomènes convectifs naturels en milieu industriel : du refroidissement des circuits électroniques au tunnel sous la Manche* ». *Rev. Gén. Therm. Fr. n°356-357*, p.499-507, Septembre 1991.
- [2]. **OSTRCH (S.)**. « Natural convection with combined driving forces », *Physico chem. Hydrodyn. 1*, 133-247.
- [3]. **TREVISAN (O.V.) et BEJAN (A.)**, « Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in porous medium », *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.28m 1579-1611. (1985).
- [4]. **OSTRACH. (S.)**, « Natural convection heat transfer in cavities and cells », *Porc. 7<sup>th</sup> int. heat Transfer Conf.*, vol.365-379.(1982).
- [5]. **TREVISAN. (V.) et BEJAN (A.)**, « Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium heated from below », *int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, 2341-2356.
- [6]. **SEVELEDR (V.) PETIT (J.P.)**, « Flow structure induced by opposing forces in double-diffusion natural convection in cavity », *Numerical heat Transfer*, vol. 15, 431-444. (1989).
- [7]. **LIN (F.) , HUANG (C.C.) et CHANG (T.S.)**, « Transient binary mixture natural convection in a square enclosures », *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol..33,1315-1331. (1993).
- [8]. **LEE (J.), HYUN (M.T.)**, « Numerical experiments on natural convection in a stably stratified fluid due to side-wall heating », *Numerical Heat Transfer*, vol..18, 343-355. (1990).
- [9]. **LEE (J.W.), HYUNG (J.M.)**, « Double-diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients », *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol..33,1619-1632.(1990).
- [10]. **BEGHEIN (C.), HAGHIGHAT. (F.) et Allard (F.)**, « Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity ». *Int. Heat Mass Transfer* , vol.35,833-846. (1992).
- [11]. **KAMOTANI (Y.), WANG (L.W.), OSTRACH (S.) et JIAN (H.D.)**, « Experimental study natural convection in shallow enclosures with horizontal temperature and concentration gradients », *Int. Heat. Mass Transfer* , vol. 28, 165-173. (1985).

- 
- [12]. **MHARZI (M.), DAOUDI (S.), DAGUENET (M.)**, « Heat and Mass Transfer natural convection in square cavity partially filled with porous layer ». 4eme International conference on Advaced computational Methods in Heat Transfer, *Heat Transfer 96, Unide-Italy, 8-10 july1996.*
- [13]. **OSTRACH (S.), JIAN (H.D.) et KAMOTANI (Y.)**, « Thermosolutal convection in shallow enclosures », *ASME-JSME Thermal Engng Join Conf., Hawaii. 1987*
- [14]. **LEE (J.), HYUN (M.T .)** ; « Experimental study of natural convection due to combined buoyancy in Law- aspect ratio enclosures », *ASME-JSME Thermal Engng Join Conf., Hawaii. (1987).*
- [15]. **RANGANATHAN (P.) et VISKANATA (R.)**, « Natural convection in binary gaze in rectangular cavities ». *Numerical Heat Transfer, vol. 12,83-99, (1987).*
- [16]. **BEJAN (A.)**, « Mass and heat transfer by natural convection in vertical cavity », *Int. J. Heat fluid Flow, vol.6, 149-159. (1985).*
- [17]. **CHANG (J.), LIN (T. F.) et CHEIN (C.H.)**, « Unsteady thermosolutal opposing convection of a liquide-water mixture in a square cavity-I. Flow formation and heat and mass transfer characteristics », *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, 1315-1331.(1993).*
- [18]. **VIOLLET (P.L.), CHABARD (J.P.), ESPOSITO (P.), LAURENCE (D.)** « Mécanique des fluides appliquée » . *Presses de l'école nationale des ponts et chaussées. IBSN 2-85978-301-6. 1998.*
- [19]. **JACQUES P. P.**, « Fluides en écoulement », *Ed : MASSON ,1990.*
- [20]. **IVERNEL. A.**, « Représentations analogiques et homologiques dans les techniques de la chaleur », *Ed : DUNOD 1965*
- [21]. **JEAN (T.). et JEAN (P. P.)**. « Transferts thermiques. Mécanique des fluides anisothermes ». *Ed :Dunod, 1998. IBSN 2 10 003624 6.*
- [22]. **SUHAS V. PATANKAR**. « Numerical Heat transfer and fluid flow ». *Series in computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Hemisphere corp (New York).1980.*

# **Exemples courants de la convection de double diffusion**

---

---

### III-I. Introduction

La convection de double diffusion est un phénomène de dynamique des fluides décrivant une forme de convection entraînée par deux gradients de densité différents ayant des taux de diffusion différents

La plupart des modèles numériques se limitent sur le cas d'un fluide homogène. Mais les fluides peuvent être des mélanges de plusieurs espèces. Par exemple :

- dans un réacteur chimique on aura plusieurs espèces qui vont réagir (il s'agit principalement de convection massique forcée)...

- dans un piston on aura un mélange air/ essence qui va agir...

- dans une rivière on aura de la vase et des particules en suspension...

- dans une centrale nucléaire on aura des neutrons dans les barres d'Uranium...

- dans les centrales, ou les cocottes minutes, on a de l'eau en ébullition (mélange eau/gaz)...

- dans la fumée de l'usine on a des polluants (gaz, gouttes ou particules)...

- dans le panache de l'éruption volcanique il y a des cendres...

- Le Gulf Stream est un exemple de convection thermosolutale : chauffé à l'équateur, se refroidit vers les pôles, il est aussi plus chaud en surface qu'en profondeur, de plus la densité de sel est plus forte en profondeur...

la dynamique de l'ensemble est fondamentale pour les modèles de climats...

---

### III-2. Mécanisme

La convection dans les fluides est entraînée par des variations de densité en leur sein sous l'influence de la gravité. Ces variations de densité peuvent être provoquées par des gradients dans la composition du fluide, ou par des différences de température (par dilatation thermique). Ces gradients peuvent se diffuser avec le temps, réduisant leur capacité à entraîner la convection et exigeant que des gradients dans d'autres régions de l'écoulement existent pour que la convection se poursuive. Un exemple courant de convection de double diffusion est en **océanographie**, où les concentrations d'énergie thermique et de sel existent avec différents gradients et diffusent à des vitesses différentes. Un effet qui affecte ces deux variables est l'apport d'eau douce froide d'un **iceberg**.

### III-3. Applications :

La convection de double diffusion ou dite « thermosolutale » est importante pour comprendre l'évolution d'un certain nombre de systèmes qui ont de multiples causes de variations de densité. Ceci inclut la convection dans les **océans terrestre**, dans les chambres magmatiques ou dans **le Soleil** (où l'énergie thermique et l'hélium se diffusent à des taux différents). Les sédiments peuvent également être considérés comme ayant un taux de diffusion brownien lent par rapport au sel ou à la chaleur, de sorte que la convection de double diffusion est considérée comme importante sous les rivières chargées de sédiments dans les lacs et les océans.

Ce mécanisme joue également un rôle important dans l'apparition du **Salt fingering**, c'est-à-dire la remontée des nutriments et le transport vertical de chaleur et de sel dans les océans. Ces "**salt fingers**" contribuent au

---

mélange vertical dans les océans, jouant un rôle dans le contrôle du climat et alimentant la flore et la faune.

Le phénomène est également étudié en **géologie**, en **astrophysique** et en **métallurgie**

### III-4. En météorologie

---

#### III-4-1. Nuages convectifs

On donne à la classe des nuages d'origine convective le nom générique de cumulus. Lorsque la couche d'air instable est peu étendue verticalement, on a formation de cumulus humilis, dit cumulus de beau temps, synonymes d'air ascendant. Si l'énergie potentielle de convection disponible (EPCD) augmente, on passe ensuite au **cumulus mediocris**, puis au **congestus**, le second produisant les averses. Si l'instabilité est plus grande on obtient le cumulonimbus **calvus**, pour finir au roi des **nuages** le cumulonimbus cappilatus incus qui sont synonymes d'un orage mûr et possédant également un cycle descendant de convection.

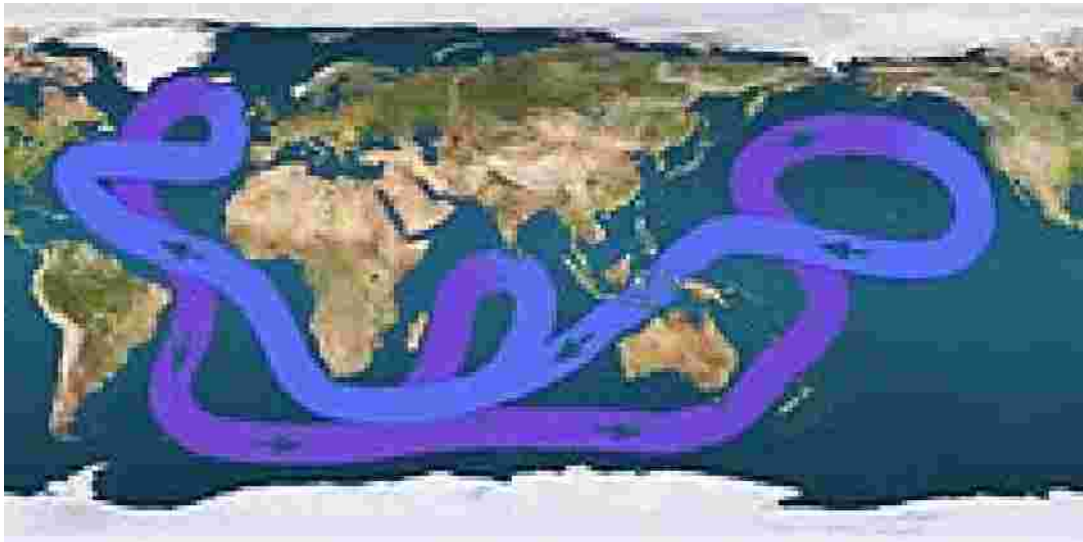
Chacun de ces nuages est appelé aussi **cellule convective**. Les **orages** peuvent être formés de cellules convectives isolées et on parlera alors d'un orage mono ou uni-cellulaire pour ceux peu importants et d'orages supercellulaires pour les autres. Les orages composés plusieurs cellules convectives se classent en deux catégories, soit les orages multicellulaires, pour ceux provenant d'une cellule initiale qui se clone, et les systèmes convectifs de méso-échelle (ligne de grain, Derecho, complexe convectif de méso-échelle, cyclone tropical, etc.), pour celles qui s'unissent à partir d'une genèse distincte [2].



**Photo :** Nuages convectifs [2].

### **III-4-2.Océanographie**

L'océan est animé de courants marins mettant en œuvre phénomènes de convection. Les eaux de surface réchauffées par le soleil à l'équateur se déplacent en courants superficiels ayant une épaisseur jusqu'à 800 mètres sous l'action des vents. Le réchauffement a comme conséquence une évaporation en surface qui concentre le sel contenu dans l'eau et donc la salinité de ces courants. Ce sont d'abord les alizés qui les poussent d'est en ouest puis, aux abords des continents, le courant remonte vers les hautes latitudes dans les vents généralement d'ouest. Les eaux se refroidissent ensuite à l'approche des calottes polaires et du fait de leur plus grande densité due à leur salinité, s'enfoncent au fond de l'océan. Elles terminent le cycle en retournant vers l'équateur. Cette convection océanique est dite aussi thermosaline, car elle est liée à la température et à la salinité de l'eau de mer [2]



**Fig.1 : Océanographie**

### **III-4-3. Tourbillon de poussière**

Un tourbillon de poussière, ou de sable, se forme par beau temps, lorsque de l'air sec et instable entre en rotation et soulève la poussière ou le sable du sol. Les tourbillons de poussières sont appelés willy-willies en Australie, d'après un mot aborigène, et dust devils aux États-Unis. Au Québec, on parlera parfois de Sorcières, vu l'apparence des vortex, mais il s'agit d'un usage vieilli ou local. Les Arabes pensaient que ces phénomènes étaient liés aux djinns.

Ces tourbillons ont un diamètre allant de quelques centimètres à plus de 10 mètres et ont une extension verticale de quelques mètres à plus de mille mètres. La plupart des tourbillons de poussière sont pas dangereux mais certains sont assez puissants pour soulever des objets lourds. Ainsi, le 7 mai 2006, à Trenton (Dakota du Nord) une petite fille de 4 ans qui jouait sur un trampoline fut soulevée à 8 mètres d'altitude, et en réchappa avec des blessures mineures [3].

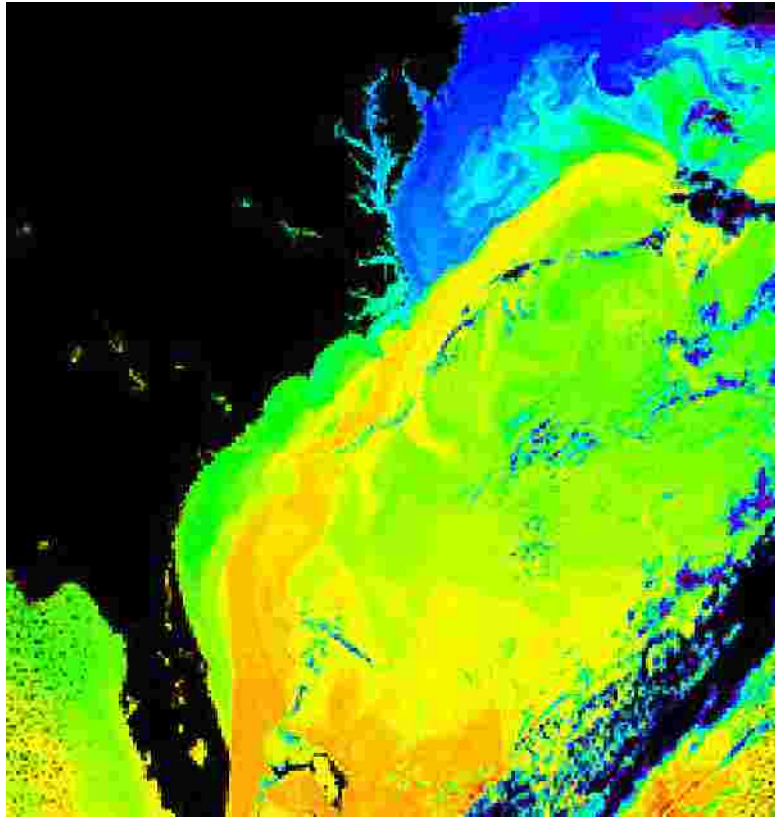




**Photo :** Tourbillon de poussière [3]

### **III-4-3.Le Gulf stream**

L'eau chaude produite dans l'Atlantique équatorial se dirige vers l'Amérique du Nord avant de tourner vers l'Europe en surface dans le Gulf Stream. Elle plonge ensuite en profondeur et se dirige vers le sud de l'Afrique. Ce faisant l'eau se réchauffe et le sel se dilue lentement, Il finit par remonter en surface au nord de l'océan Indien et du Pacifique. les eaux font un nouveau cycle en surface qui se termine le long de la côte ouest de l'Amérique et replongent en profondeur pour éventuellement resurgir dans l'Atlantique. Une boucle semblable se produit dans l'hémisphère sud. Le cycle complet de cette circulation thermohaline est estimé, de 600 à 800 ans.



**Fig.2:** Le Gulfstream

Le rôle de ces boucles convectives est essentiel car il permet le transport de chaleur, libérée dans l'atmosphère, de l'équateur vers les pôles. Si ce transfert n'existait pas, il ferait plus chaud à l'équateur et plus froid aux hautes latitudes. Le Gulf Stream et le Kuro Shivo réchauffent ainsi les eaux respectivement situées au large de l'Europe et du Japon. La convection océanique joue aussi un rôle important dans le cycle du carbone. En effet, en plongeant les eaux marines entraînent une grande quantité de dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) qui a été capturé par l'atmosphère et qui y est dissous. Ce dioxyde de carbone est restitué en partie à l'atmosphère lorsque les eaux profondes remontent à la surface.

### III-4-4. Le Soleil :

Actuellement, dans le cœur du Soleil, chaque seconde, viron 627 millions de tonnes d'hydrogène fusionnent<sup>29</sup> pour produire environ 622,7 millions de tonnes d'hélium. La différence de masse de 4,3 millions de tonnes (une masse de l'ordre de celle de la pyramide de Gizeh<sup>30</sup>) équivaut à l'énergie lumineuse produite ( $4 \times 10^{26}$  joules). Cette énergie migre lentement, par rayonnement et par convection, vers la surface solaire et est émise dans l'espace sous forme de rayonnement électromagnétique (lumière, rayonnement solaire) et de flux de particules (vent solaire).

La zone de convection ou zone convective s'étend de 0,1 rayon solaire du centre à la surface visible du Soleil. Elle est séparée de la zone radiative par une couche épaisse d'environ 3 000 kilomètres, la tachocline, qui d'après les études récentes pourrait être le siège de puissants champs magnétiques et jouerait un rôle important dans la dynamo solaire. Dans la zone de convection la matière n'est plus ni assez dense ni assez chaude pour évacuer la chaleur par rayonnement : c'est donc par convection, selon un mouvement vertical, que la chaleur est conduite vers la photosphère. La température y passe de 2 millions à ~5 800 kelvins. La matière parvenue en surface, refroidie, plonge à nouveau jusqu'à la base de la zone de convection pour recevoir la chaleur de la partie supérieure de la zone de rayonnement, etc. Les gigantesques cellules de convection ainsi formées sont responsables des granulations solaires observables à la surface de l'astre. Les turbulences survenant dans cette zone produisent un effet dynamo responsable de la polarité magnétique nord-sud à la surface du Soleil [2].

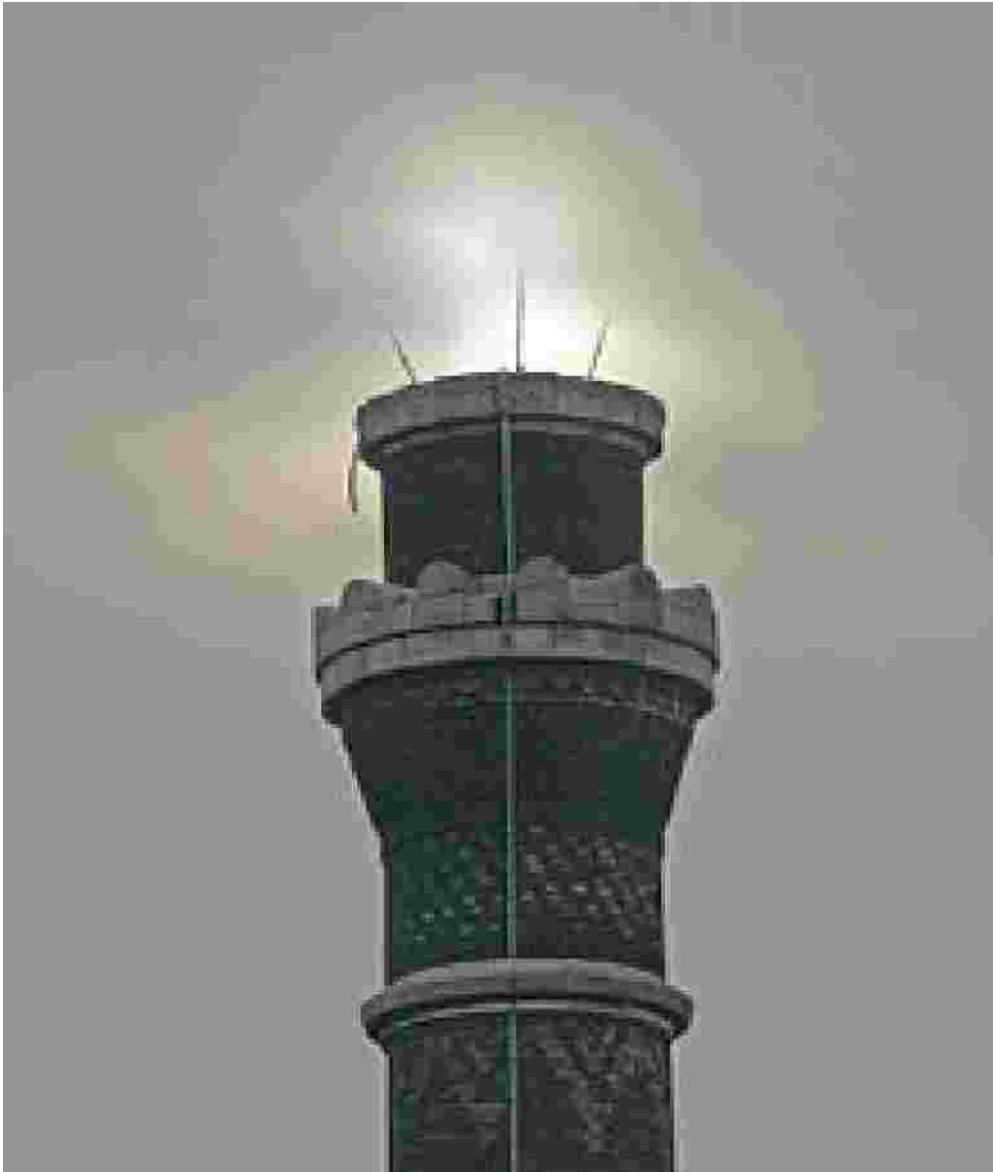
### III-5. En industrie

Le phénomène de la convection thermosolutale est souvent rencontré dans l'industrie, nous citons à titre d'exemples :

- Le brûleur de la montgolfière réchauffe l'air au-dessus de lui et fait monter la **nacelle**.
- L'eau du circuit de refroidissement des **réacteurs** des **centrales nucléaires** est refroidie dans les grandes cheminées en utilisant la capacité d'extraction de chaleur de la convection associée à la chaleur d'évaporation de l'eau particulièrement élevée.
- Les **tours solaires** utilisent également la convection : l'air chauffé par le soleil à la base de la tour remonte dans la tour.

#### III-5-1. Les cheminées

La cheminée est le conduit (conduit de fumée), construit en dur, qui véhicule et confine les fumées, la vapeur d'eau, les autres gaz de combustion, éventuellement toxiques, d'un quelconque foyer, ouvert ou fermé, brûlant, afin de les évacuer ou, plus rarement, de les traiter. Le terme « cheminée » désigne également, par métonymie, l'âtre, le foyer.



**Photo :** Cheminée [5].

### **III-5-2. Réacteurs :**

Un réacteur nucléaire est un ensemble de dispositifs comprenant du combustible nucléaire : le « cœur » du réacteur, dans lequel une réaction en chaîne peut être initiée, modérée et contrôlée par agents humains et/ou par des systèmes automatiques, via des protocoles et des dispositifs de modération de la fission nucléaire et d'évacuation de la chaleur.

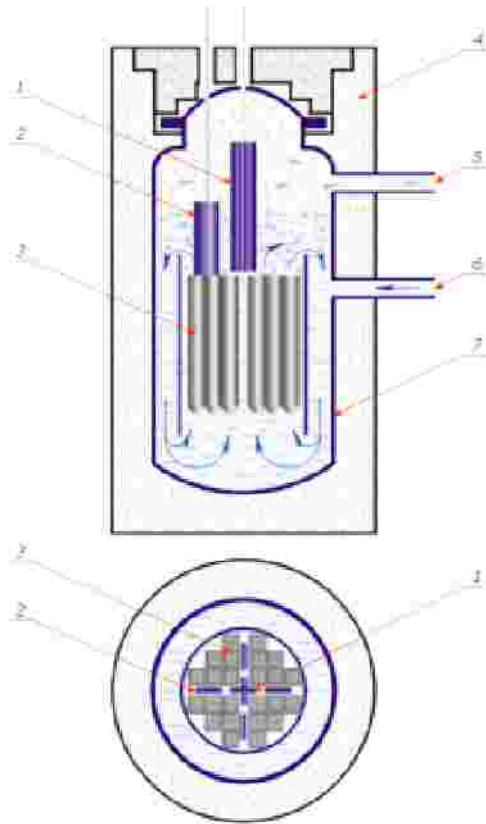


Fig. 3 : Réacteur à eau bouillante [5].

- 1-barre d'arrêt d'urgence
- 2-barre de contrôle
- 3-assemblage combustible
- 4-protection biologique
- 5-sortie de vapeur
- 6-entrée de l'eau
- 7-protection thermique

---

### III-5-3. Centrales nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d'électricité et dont la chaudière est constituée d'un ou plusieurs réacteurs nucléaires ayant pour source d'énergie un combustible nucléaire. La puissance électrique d'une centrale varie de quelques mégawatts à plusieurs milliers de mégawatts en fonction du nombre et du type de réacteur en service sur le site.

L'énergie d'une centrale nucléaire provient de la fission de noyaux d'atomes lourds. Celle-ci dégage de la chaleur, qui sert dans un premier temps à vaporiser de l'eau, comme dans toute centrale thermique conventionnelle, puis la vapeur d'eau produite entraîne en rotation une turbine accouplée à un alternateur qui produit à son tour de l'électricité.



**Photo :** centrale nucléaire [6]

---

### III-5-4. Le séchage

Le séchage est l'un des processus industriels qui nécessite une énergie intense, La recherche dans le domaine des transferts de chaleur et de masse couvre un champ très vaste car les applications concernées sont extrêmement variées. On peut citer les procédés de séchage, l'isolation thermique, les écoulements géophysiques, etc. L'apparition de l'humidité dans l'enveloppe des bâtiments est attribuée aux phénomènes de diffusion et de condensation de l'air humide intérieur. La méthode de Glaser (calcul stationnaire de diffusion de vapeur), facile à utiliser n'est malheureusement qu'un outil simplifié qui ne permet que d'éviter les risques de condensation dans la masse. Il y a cependant d'autres sources d'humidité, comme la pluie battante, les remontées capillaires, l'humidité de construction qui peuvent aussi affecter l'ensemble du patrimoine bâti: monuments historiques et constructions récentes. Ces phénomènes ne peuvent pas être traités correctement avec la méthode de Glaser qui ne décrit que le processus de diffusion, car d'autres mécanismes apparaissent, comme la condensation en été, les cycles humidification séchage, le gel dégel le stockage transitoire d'humidité et la perte de chaleur par évaporation, qui peuvent soit entraîner des dommages, soit augmenter la consommation d'énergie.

Pour prévoir et suivre les mouvements d'humidités dans l'enveloppe d'un bâtiment, de nombreux outils de simulation ont été développés dans le monde. En effet, pour quantifier les effets de l'humidité, tels que la moisissure ou la croissance des algues, la corrosion, le gel, des modèles d'analyse des données résultant des calculs doivent être développés afin de prévoir les risques de dégradation qui peuvent en résulter.

Le séchage par convection, c'est un mode de transfert le plus courant. Il consiste à mettre en contact un gaz (air) s'écoulant en régime généralement turbulent autour du corps à sécher qui peut se présenter sous forme de particules, de gouttelettes, de films ou de plaques [4]. La théorie classique (Bimbenet) divise le séchage d'un matériau en trois périodes: - période 0, mise en température du produit; - période I, séchage isenthalpique de vitesse de séchage constante ou l'eau libre s'évapore; - période II, ralentissement, évaporation de l'eau liée, cette phase de séchage prend naissance en général lorsque la saturation des pores se trouve dans le domaine hygroscopique [5].

Le séchage des produits agroalimentaire est l'une des techniques les plus utilisées depuis des siècles.



**Références**

1. LEONTIEV. (A.). « **Théorie des échanges de chaleur et de masse** ». *Ed : MIR.1985.*
2. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Convection>
3. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon\\_de\\_poussi%C3%88re](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon_de_poussi%C3%88re)
4. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Gulf\\_Stream](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gulf_Stream)
5. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tour\\_solaire\\_\(chemin%C3%9e\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tour_solaire_(chemin%C3%9e))
6. [https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9acteur\\_nucl%C3%A9aire](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9acteur_nucl%C3%A9aire)

**DISCRETISATION DES  
EQUATIONS AUX  
DERIVEES  
PARTIELLES**

---

# IV- Discrétisation des équations aux dérivées partielles

## V-1. DISCRETISATION DES EDP

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

### IV-1-1. Les différences finies.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

**Avantages** : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

**Inconvénients** : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

### IV-1-2. Les volumes finis.

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles.

**Avantages :** permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

**Inconvénient :** peu de résultats théoriques de convergence.

#### IV-1-3. Les éléments finis.

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage.

**Avantages :** traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

**Inconvénient :** complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

#### IV-2. Méthodes des Différences Finies

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée.

Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18<sup>ème</sup> siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit  $u(x, y, z, t)$  une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

### Notation indicielle - cas 1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur  $u(x)$  sur l'intervalle  $[0,1]$ . La recherche d'une solution discrète de la grandeur  $u$  amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de  $N + 1$  points  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, N$  régulièrement espacés avec un pas  $\Delta x$ . Les points  $x_i = i \Delta x$  sont appelés les nœuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de  $N$  valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.

Notation : on note  $u_i$  la valeur discrète de  $u(x)$  au point  $x_i$ , soit  $u_i = u(x_i)$ . De même pour la dérivée de  $u(x)$  au nœud  $x_i$ , on note  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$ . Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur  $u$ .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière"

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de  $x_i$ . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma *centré* pour approximer la dérivée première de  $u$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de  $x_i$  :

*Schémas d'ordre deux centré :*

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

### IV-3. Méthode des volumes finies

La méthode des volumes de contrôle développée par Spalting et Patankar est une méthode de résidus pondérés dans laquelle les fonctions de poids sont égales à l'unité dans des volumes finis donnés et nulles partout ailleurs. Sa grande simplicité de mise en oeuvre a fait qu'elle a connu un essor fulgurant depuis les années (1970-1980). Elle est à l'origine de la majorité des codes de calculs en géométrie cartésienne (Fluent, Phoenics...). C'est une méthode de

---

discrétisation pour les lois de conservation. Elle résulte d'un choix au sens physique, basé sur l'écriture des bilans.

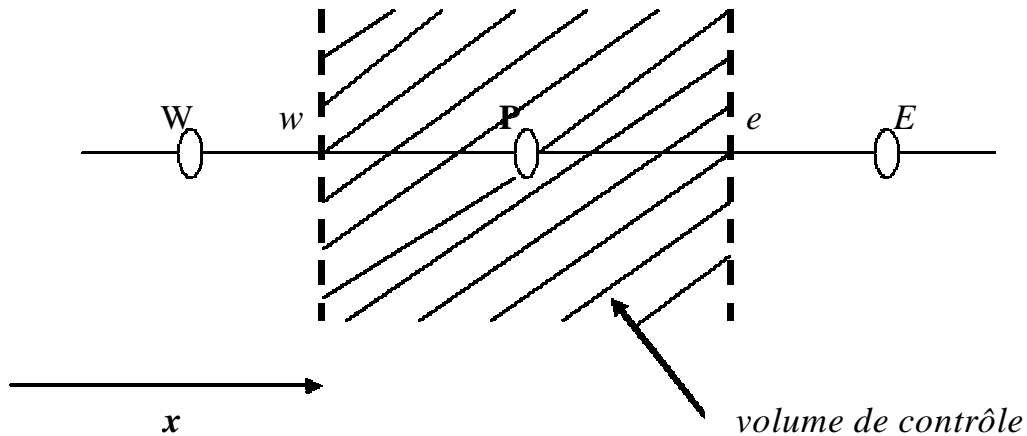
Cette méthode consiste à discrétiser sur chaque cellule, appelée volume de contrôle, la forme intégrale du problème à résoudre à la place de sa forme différentielle considérée ; en différences finies. L'avantage de cette technique par rapport aux différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes comme c'est le cas dans de nombreux problèmes industriels. De plus, elle permet aisément de prendre en compte la présence d'obstacles (dans un domaine) et de traiter de façon naturelle les conditions aux limites. La difficulté essentielle qui peut être rencontrée est l'estimation des flux aux frontières de chaque volume de contrôle lors de la mise en œuvre de cette technique.

Le domaine d'étude est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies).

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs, ensuite la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude [29].

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par les différences finies.

Le domaine est d'abord discrétisé à l'aide d'une grille unidimensionnelle (uniforme ou non) orientée positivement vers la droite. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point  $P$ , nous désignerons par  $E$  et  $W$  les nœuds situés immédiatement à sa droite et à sa gauche (figure IV-1). Le " volume " de contrôle centré en  $P$  a donc ici pour dimension  $ox$ . Nous désignerons enfin les points situés aux limites de ce volume par  $w$  et  $e$  respectivement.



**Fig.IV.1 :** volume de contrôle pour la méthode des volumes finis.[22]

Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

**IV-3-1. Discrétisation de l'équation générale :**

L'équation différentielle *générale* donnée par « Patankar » [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(r \cdot f) + \text{div}(r \cdot f \cdot V) = \text{div}[\Gamma \cdot \text{grad}(f)] + S \tag{IV-1}$$

donc ; l'équation de la continuité s'écrira :

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r \cdot v) = 0 \tag{IV-2}$$

l'intégration de l'équation « générale » :

$$\int_V \frac{\partial(rf)}{\partial t} dv + \int_V \text{div}(rf \cdot \overset{r}{V}) dv - \int_V \text{div}(\Gamma \text{grad}f) dv = \int_V S(f) dv$$

Par l'utilisation du théorème de « flux-divergence » on obtient :

$$\int_V \frac{\partial(rf)}{\partial t} dv = \int_V \text{div}(rf \cdot \overset{r}{V} - \Gamma \cdot \nabla f) dv + \int_V S(f) \cdot dv$$



avec :  $J = (rf \cdot \vec{V} - \Gamma \cdot \nabla f)$ .

De composantes :  $J_x = J \cdot n_x = r \cdot U \cdot f - \Gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ .

$$J_y = J \cdot n_y = r \cdot V \cdot f - \Gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On peut écrire (IV-1) et (IV-2) sous la forme tensorielle suivante :

$$\frac{\partial(r \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(r V_j \cdot f)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \Gamma \frac{\partial f}{\partial X_j} \right) + S \quad (\text{IV-1})$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(r V_j)}{\partial X_j} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

Pour simplifier les choses, en commençant par le cas le plus simple :

- D'après l'équation (IV-1) on peut écrire, pour le cas unidimensionnel

stationnaire :  $\frac{\partial(r U \cdot f)}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial f}{\partial X} \right)$ . (IV-3)

- La même chose pour l'équation (IV-2) :

$$\frac{\partial}{\partial X} (r \cdot U) = 0 \quad \text{où} \quad r \cdot U = \text{constante.} \quad (\text{IV-4})$$

L'intégration de l'équation (IV-3) sur le volume de contrôle (*Fig.01*) est :

$$(r U \cdot f)_e - (r U \cdot f)_w = \left( \Gamma \cdot \frac{df}{dx} \right)_e - \left( \Gamma \cdot \frac{df}{dx} \right)_w \quad (\text{IV-5})$$

Par l'utilisation de la formule de série de « TAYLOR » [31]: (**voir annexe**)

$$f_e = \frac{1}{2} (f_e + f_p) \quad \text{et} \quad f_w = \frac{1}{2} (f_p + f_w)$$

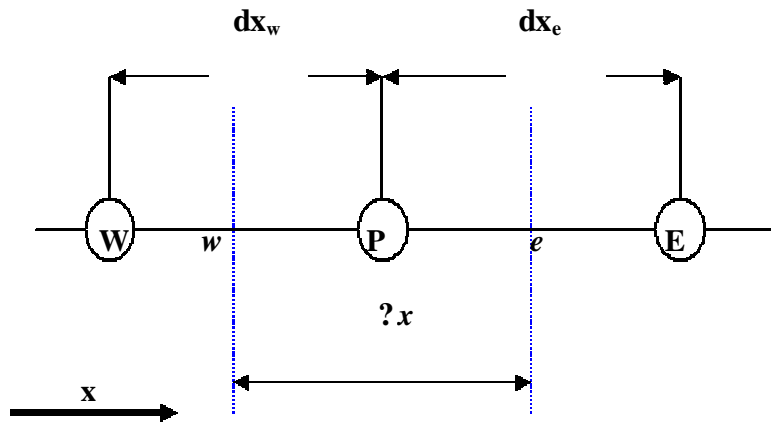


Fig.IV-2. volume de contrôle pour le cas unidimensionnel.[22]

$$\left(\Gamma \cdot \frac{df}{dx}\right)_e = \Gamma_e \cdot \frac{(f_e + f_P)}{(dx)_e} \quad \text{et} \quad \left(\Gamma \cdot \frac{df}{dx}\right)_w = \Gamma_w \cdot \frac{(f_P + f_w)}{(dx)_w}$$

Par la Substitution dans l'équation (IV-5) on obtient :

$$\frac{1}{2}(r U)_e \cdot (f_E + f_P) - \frac{1}{2}(r \cdot U)_w \cdot (f_P + f_W) = \frac{\Gamma_e \cdot (f_E - f_P)}{(dx)_e} - \frac{\Gamma_w \cdot (f_P - f_W)}{(dx)_w} \quad \text{(IV-6).}$$

Pour écrire l'équation sous forme plus compacte ; on définit :

$$F = r \cdot U \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{dx} \quad \text{(IV-7)}$$

où :  $F$  est l'intensité de la convection et  $D$  est la conductance de la diffusion.

Tel que «  $D$  », reste toujours positive, alors que la valeur de «  $F$  » dépend de la direction de l'écoulement.

Et :  $Pe = F/D$ , est le nombre de « Peclet » qui est déterminé par le rapport entre l'intensité convective et la conductance diffusive.

Après le rangement de l'équation (IV-6) on obtient :

$$a_p \cdot \phi_p = a_E \cdot \phi_E + a_W \cdot \phi_W \quad \text{(IV-8)}$$

$$a_E = D_e \cdot A(|Pee|) + [|-Fe, 0|]_{max} \quad \text{(IV-9-a)}$$

$$a_w = D_w \cdot A(|Pew|) + [|-Fw, 0|]_{max} \quad (IV-9-b)$$

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (IV-9-c)$$

### Cas bidimensionnel :

Pour le cas bidimensionnel l'équation (IV-8) s'écrit (d'après la formulation généralisée donnée par Patankar) ;

$$a_p \cdot \Phi_p = a_E \cdot \Phi_E + a_w \cdot \Phi_w + a_N \cdot \Phi_N + a_s \cdot \Phi_s + b \quad (IV-10)$$

\* La formulation généralisée est:

$$a_E = D_e \cdot A(|Pee|) + [|-Fe, 0|]_{max} \quad (IV-11-a)$$

$$a_w = D_w \cdot A(|Pew|) + [|-Fw, 0|]_{max} \quad (IV-11-b)$$

$$a_N = D_n \cdot A(|Pen|) + [|-Fn, 0|]_{max} \quad (IV-11-c)$$

$$a_s = D_s \cdot A(|Pes|) + [|-Fs, 0|]_{max} \quad (IV-11-d)$$

$$a_p = a_E + a_w + a_N + a_s + a_p^0 + S_p \Delta x \Delta y \quad (IV-11-e)$$

$$b = Sc \cdot \Delta x \cdot \Delta y + a_p^0 \cdot f_p^0 \quad \text{et} \quad a_p^0 = \frac{r_p^0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}{\Delta t} \quad (IV-11-f)$$

Les valeurs ( $\Phi_p$ ,  $\Phi_E$ ,  $\Phi_w$ ,  $\Phi_N$  et  $\Phi_s$ ) sont des quantités inconnues à l'instant ( $t + \Delta t$ ) ; d'autre part, les taux de masse (d'écoulement) :  $F_e$ ,  $F_w$ ,  $F_n$  et  $F_s$  sont déterminés par l'équation (IV-7), et les conductances correspondantes sont définies par [22]:

$$D_e = \frac{\Gamma_e \cdot \Delta y}{(dx)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \cdot \Delta y}{(dx)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \cdot \Delta y}{(dy)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \cdot \Delta y}{(dy)_s} \quad (IV-12)$$

Et les nombres de « Peclet » par :

$$(Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad (Pe)_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (IV-13)$$

Par la relation  $A(|Pe|)$ , on peut utiliser les différentes méthodes, ce qu'on appelle « les schémas ».

pour le schéma « Power-Law » [22]:

$$A(|Pe|) = [0, (1 - 0.1|Pe|)^5]_{max}$$

**IV-3-2. Maillage décalé pour évaluer les vitesses :**

Dans la (M.V.F), il est préférable d'évaluer les composantes de vitesse aux interfaces entre deux volumes adjacents (Fig :IV-4).

La raison pour laquelle un maillage décalé doit être utilisé pour résoudre (numériquement) les équations de *Navier-Stokes* est expliquée ces-dessous :

Quand le gradient de pression est discrétisé, on obtie a formule :

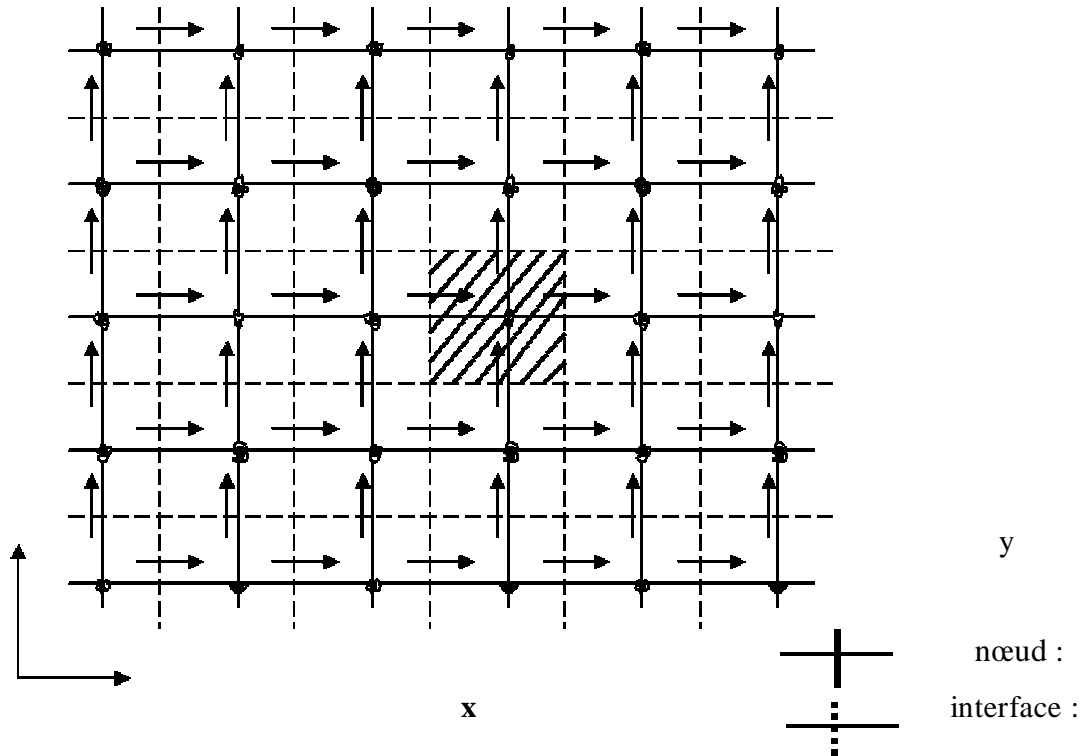
$$P_w - P_e = \frac{P_w + P_p}{2} - \frac{P_p + P_e}{2} = \frac{P_w - P_e}{2} \tag{IV-14}$$

C'est à dire que la différence de pression entre deux volumes qui ne sont pas adjacents est utilisée dans l'équation de mouvement (Navier-Stokes). Le

même problème apparaît dans l'équation de continuité ( $\rho = \text{constante}$ ) est :

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{U_e - U_w}{\Delta x} = 0 \Rightarrow U_e - U_w = 0 \Rightarrow \frac{U_p + U_e}{2} - \frac{U_w + U_p}{2} = 0 \Rightarrow \frac{U_e + U_w}{2} = 0$$

Au point de vue historique, le maillage décalé est un concept introduit par « Harlow » et « Welch » en 1966 pour la méthode (MAC).



**Fig IV.04 :** Maillage décalé 2-D (pour évaluer les vitesses).

---



---

 IV-4. Equation de correction de la vitesse :

D'après la discussion précédente, quand un maillage décalé est utilisé pour calculer les composantes de vitesse, la discrétisation de la composante horizontale de l'équation de mouvement est :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} \cdot U_{nb} + b + (P_P - P_E) \cdot \Delta y \quad (\text{IV-15})$$

En utilisant un maillage décalé pour calculer la composante de vitesse dans la direction verticale, la discrétisation s'écrit :

$$a_n V_n = \sum a_{nb} \cdot V_{nb} + b + (P_P - P_N) \cdot \Delta x \quad (\text{IV-16})$$

Si le champ de pression est connu, il est possible de calculer le champ de vitesse à partir des équations ci-dessus.

Après avoir deviné le champ de pression on calcule un champ « hypothétique » de vitesses :

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} \cdot U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) \cdot \Delta y \quad (\text{IV-17})$$

$$a_n V_n^* = \sum a_{nb} \cdot V_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) \cdot \Delta x \quad (\text{IV-18})$$

Il reste à corriger l'estimation initiale de la pression afin de converger vers la solution exacte, si  $(P^*)$  est la pression donnée et  $(P')$  la correction de pression, la nouvelle pression sera calculée avec :

$$P = P^* + P' \quad (\text{IV-19})$$

Et les corrections  $(U')$  et  $(V')$  sont déterminées si la correction de pression est connue, tel que les composantes des vitesses corrigées s'obtiennent de manière analogue :

$$U = U^* + U' \quad \text{et} \quad V = V^* + V' \quad (\text{IV-20})$$

Il ne reste que trouver une équation pour ( $P'$ ), par la soustraction des équations (IV-17) et (IV-15) on obtient [22] :

$$a_e U'_e = \sum a_{nb} \cdot U'_{nb} + (P'_P - P'_E) \cdot \Delta y \tag{IV-21}$$

IV-5. Equation de correction de la pression :

L'équation de correction de la pression est déduite de l'équation de continuité.

L'équation de continuité est : 
$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(r U)}{\partial x} + \frac{\partial(r V)}{\partial y} = 0 \tag{IV-22}$$

On intègre cette équation sur le volume de contrôle (l'aire hachuré Fig.05) ; le même volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation pour la variable générale  $f$  .

Donc l'intégration de l'équation (IV-22) donne [22]:

$$\frac{(r_P - r_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(r U)_e - (r U)_w] \Delta y + [(r V)_n - (r V)_s] \Delta x = 0 \tag{IV-23}$$

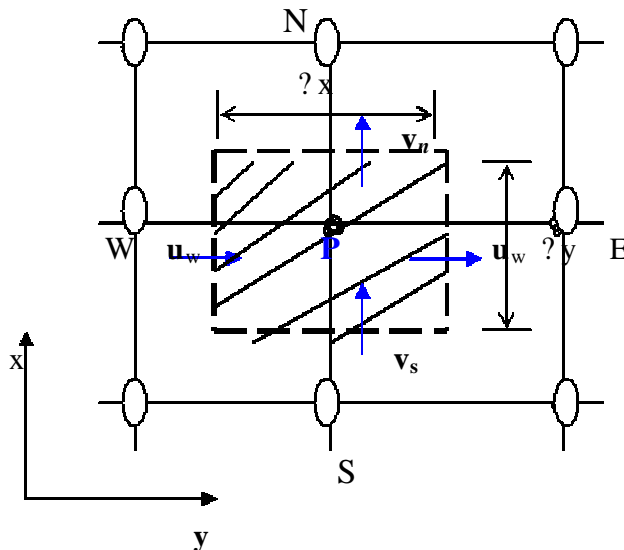


Fig. III-05 : Le volume de contrôle pour l'équation de continuité. [22]

En remplaçant les composantes des vitesses par les équations de correction des vitesses, et après le rangement on obtient l'équation de correction de pression ( $p'$ ) :

$$a_p.P'_p = a_E.P'_E + a_W.P'_W + a_N.P'_N + a_S.P'_S + b \quad (IV-24)$$

avec :

$$a_E = \rho_e \cdot d_e \cdot \rho_y \quad (IV-25-a)$$

$$a_W = \rho_w \cdot d_w \cdot \rho_y \quad (25-b)$$

$$a_N = \rho_n \cdot d_n \cdot \rho_x \quad (25-c)$$

$$a_S = \rho_s \cdot d_s \cdot \rho_x \quad (25-d)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (25-e)$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left[ (\rho U^*)_w - (\rho U^*)_e \right] \Delta y + \left[ (\rho V^*)_s - (\rho V^*)_n \right] \Delta x \quad (25-f)$$

Dans le cas où seules valeurs de  $\rho$  aux nœuds  $(i,j)$  et  $(i+1,j)$  sont utilisées dans l'approximation des dérivées partielles des différentes équations différentielles, cette somme s'écrit :

$$\sum_k a_k f_k = a_e(f_{i+1,j}) + a_w(f_{i-1,j}) + a_n(f_{i,j+1}) + a_s(f_{i,j-1}) \quad (IV-26)$$

Notons que les indices  $p, w, e, n$  et  $s$  sont utilisés en vue d'indiquer respectivement les nœuds  $(i,j), (i-1,j), (i+1,j), (i,j-1)$  et  $(i,j+1)$ .

Les expressions  $a_p, a_n, a_s, a_e, a_w$  et le terme source  $b(i,j)$  dépendent de la méthode numérique adopté pour l'approximation de l'équation analytique relative à la grandeur  $\phi$ . Ces coefficients sont toujours exprimés en fonction du coefficient de diffusion  $G$ , des pas d'espaces  $d(x_e), d(x_w), d(y_n), d(y_s), \rho_x,$

et  $\Delta y$  ainsi que du nombre  $Pe$  de *Peclet local* (Patankar 1980). Leurs expressions générales respectives sont données par :

$$\begin{aligned}
 a_n &= D_n A(Pe_n) + \max[-F_n, 0] \\
 a_s &= D_s A(Pe_s) + \max[-F_s, 0] \\
 a_e &= D_e A(Pe_e) + \max[-F_e, 0] \\
 a_w &= D_w A(Pe_w) + \max[-F_w, 0] \\
 a_p &= a_e + a_w + a_n + a_s \\
 b &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot Sc + a_p^0 \cdot \Delta x^0 \cdot \Delta y^0 \\
 a_p^0 &= (\Delta x^0 \cdot \Delta y^0) / \Delta t
 \end{aligned}
 \tag{IV-27}$$

Les différents termes utilisés dans les relations (IV-27) sont définis comme suit :

$$F_e = U_e \Delta y \quad D_e = (G_e \Delta y) / d(x_e) \quad Pe_e = F_e / D_e
 \tag{IV-28}$$

L'expression de la fonction  $A(Pe)$  relatives aux différents schémas numériques :

Schéma numérique	$A(Pe)$
Différence centrées	$1 - 0.5 Pe $
Upwind	1
Hybrid	$\text{Max}[0, 1 - 0.5 Pe ]$
Power Law	$\text{Max}[0, (1 - 0.5 Pe )^5]$
Exponential (exact)	$ P  / [\exp( P ) - 1]$

**Tableau IV-1.** Expression de  $A(Pe)$  relatives aux différents schémas numériques. [22]



---

#### IV-6. Résolution du système d'équations linéaires :

La plupart des phénomènes relatifs à la dynamique des fluides sont contrôlés par des systèmes d'équations non linéaires dont la résolution numérique s'appuie souvent sur les méthodes itératives. La solution relative à chaque variable  $\phi$  et pour chaque nœud  $(i,j)$  est corrigée séquentiellement en utilisant les expressions des équations différentielles gouvernantes.

Le processus itératif est équivalent à une avance par pas vers la solution en tenant compte à chaque étape (itération) du changement qui affecte les variables concernées par le calcul. Ce processus peut converger vers la solution en un nombre d'itérations pouvant varier de quelques centaines à plusieurs milliers comme il peut carrément diverger.

Pratiquement quelle que soit la méthode numérique adoptée pour résoudre le système d'équations algébriques gouvernant un processus relatif à la dynamique des fluides, l'adoption d'un calcul itératif est quasi inévitable (Roache 1976 ; Patankar 1980 ; Peyret et al. 1983 ; Fletcher 1988)[32-22-33-34]

Les équations régissant la convection thermosolutale montrent que les grandeurs  $T$ ,  $C$  et  $V$  à calculer sont fortement couplées.

L'adoption d'une méthode itérative est généralement justifiée par le fait qu'elle présente l'avantage :

- D'être moins sensible aux arrondis d'erreurs,
- De nécessiter peu d'espace mémoire,
- De converger vers une solution indépendante de la valeur Initiale donnée à  $\phi$ ,
- D'être facile à programmer.

---

**Références :**

1. Eric Goncalvès, RESOLUTION NUMERIQUE, DISCRETISATION DES EDP ET EDONSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUEDE GRENOBLE, septembre2005.
2. SUHAS V. PATANKAR. « Numerical Heat transfer and fluid flow ». *Series in computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Hemisphere corp (New York).1980.*
3. ROACHE P. J., « Computational fluid dynamics, *Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M.* (1976).
4. PEYRET R., TAYLOR T. D. « Computational methods for fluid flow », *Springer Series in computational physics, New York. (1983).*
5. FLETCHER C.A.J., « Computational techniques for fluid dynamics », *Springer series in Computational Physics, New York, (1988).*

**Modèle 1 :**

**MODELISATION DE LA  
CONVECTION DE DOUBLE  
DIFFUSION**

---

---

## *Modélisation de la convection thermosolutale dans une cavité fermée*

---

### V-1. Introduction :

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires interagissant entre eux (la météorologie, la turbulence des fluides..)

L'une des solutions est de recourir à une série d'expériences pour analyser les paramètres et grandeurs du système. Mais les essais peuvent s'avérer très coûteux, et ils peuvent être très dangereux.

On peut aussi construire un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène physique. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes **d'équations aux dérivées partielles (EDP)** non-linéaires dont on ne connaît pas de solutions analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage)

La formulation mathématique des équations gouvernant le phénomène convectif dépend étroitement de la nature de cette convection (naturelle, forcée ou mixte), du type du fluide utilisé (parfait, visqueux, compressible, etc.) ainsi que des hypothèses simplificatrices choisies. Autrement dit, l'écriture des équations régissantes doit s'adapter au type d'étude envisagée ainsi qu'aux hypothèses simplificatrices complémentaires formulées.

V-2. Description d'un modèle spécifique :

Notre étude porte sur l'analyse de la convection naturelle bidimensionnelle, laminaire et transitoire engendrée par des gradients de température et de concentration dans une cavité parallélépipédique allongée. La longueur, mesurée dans la direction perpendiculaire au plan de la figure est supposée très grande devant la longueur  $L$  compté suivant l'axe  $Ox$  et la hauteur  $H$  comptée suivant la coordonnée  $y$  (Figure V-1).

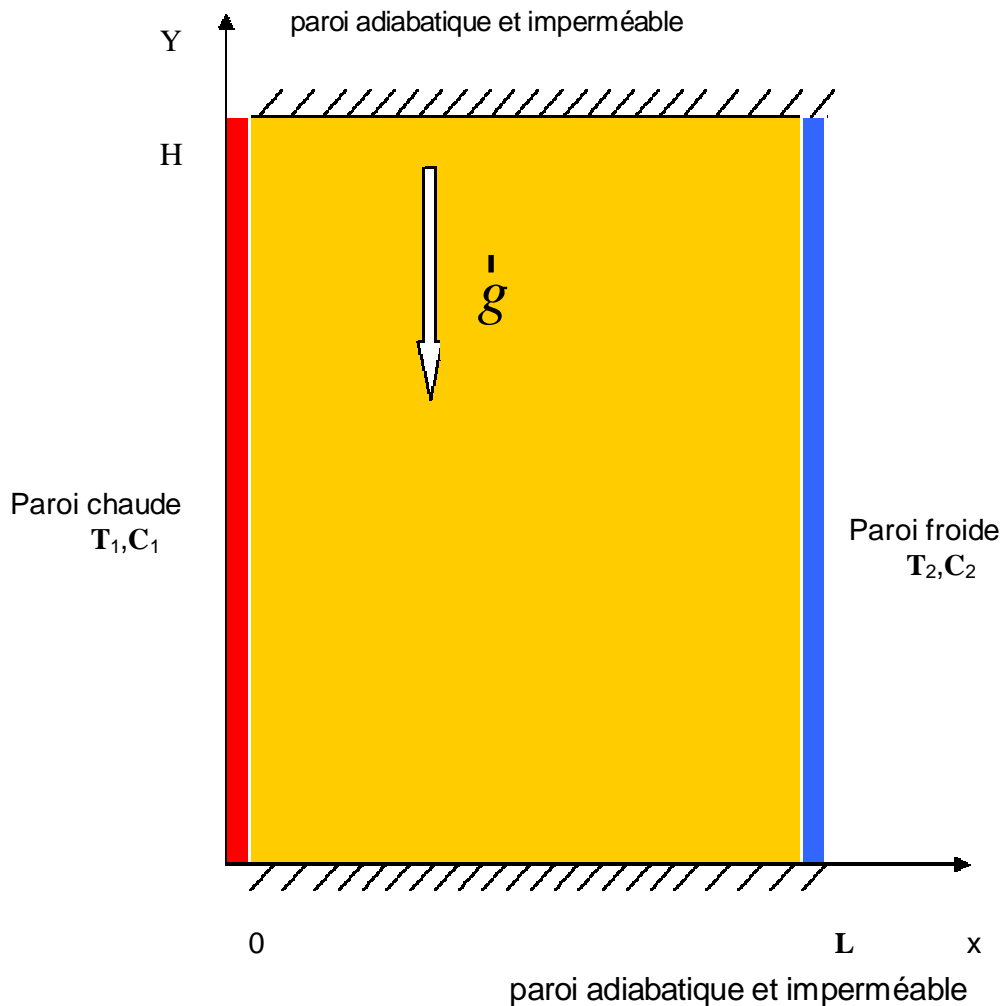


Fig.V-1 : Représentation schématique du modèle physique étudié

On suppose que le plancher ( $y=0$ ) et le plafond ( $y=H$ ) de la cavité sont adiabatiques et imperméables à la matière, que sur la paroi verticale externe de gauche ( $x=0$ ) la température est égale à  $T_1$  et la fraction massique du soluté à  $C_1$ , que sur la paroi verticale externe de droite ( $x=L$ ), la température est égale à  $T_2$  et la fraction massique du soluté à  $C_2$  avec  $T_2 < T_1$  et  $C_2 < C_1$ .

### V-3. Hypothèses simplificatrices :

Nous nous plaçons dans le cas d'une cavité bidimensionnelle de hauteur  $H$  remplie d'un fluide. Les vitesses en convection naturelle sont modérées et on peut donc négliger l'échauffement dû à la viscosité dans l'équation de l'énergie. L'écoulement est supposé bidimensionnel et laminaire, et les propriétés du fluide sont supposées constantes. La variation, dans les couches limites, de la masse volumique suivant la température est calculée, en utilisant l'approximation de *Boussinesq* [1] et n'est considérée que dans les termes qui engendrent le mouvement. Les équations sont simplifiées à l'aide de grandeurs dimensionnées selon les échelles caractéristiques.

Le comportement de l'écoulement à l'intérieur de la cavité est modélisé grâce au modèle mathématique considérant un fluide supposé :

- monophasique,
- le fluide est transparent aux rayons infrarouges et les échanges thermiques par rayonnement sont négligeables,
- la dissipation visqueuse ainsi que le terme de pression dans l'équation de la chaleur sont négligeables,
- la configuration ne contient ni source ni puits d'énergie ou de matière et n'est le siège d'aucune réaction chimique,
- le mouvement convectif est supposé bidimensionnel et instationnaire.

Avant d'exposer les équations, on doit décrire la méthode avec laquelle sera décrit l'écoulement du fluide.

Chaque particule du fluide dans l'écoulement aura une valeur instantanée pour la vitesse ainsi que pour toute autre propriété du fluide.

Au lieu de poursuivre le détail de chaque particule, on trouve qu'il est plus convenable de décrire l'écoulement en se fixant sur un point dans l'espace et observer les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point...

#### V-4. Simplification des équations :

Le processus convectif dans un fluide considéré comme milieu continu est géré par les principes généraux de conservation. Le système d'équations les traduisant et tenant compte des hypothèses précédentes s'exprime sous forme vectorielle en fonction des grandeurs dimensionnelles (vitesse, température, concentration et pression) comme suit :

##### 1. Equation de la continuité :

Après simplification, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r \cdot V) = 0 \quad (\text{V-1})$$

$U$  et  $V$  sont les composantes du vecteur de vitesse.

##### 2. Equations de mouvement :

D'après les hypothèses précédentes on a :

Suivant l'axe ( $ox$ ) :

$$r \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + m \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (\text{V-2})$$

Suivant l'axe ( $oy$ ) :

$$r \left( \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + m \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - gr \cdot F(T, C) \quad (V-3)$$

**3. Equation de la chaleur :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(T) = \text{div} (a \cdot \text{grad} T) \quad (V-4)$$

avec :  $a = \frac{l}{r \cdot c_p}$

**4. Equation de la concentration chimique :**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(C) = \text{div} (D \cdot \text{grad} C) \quad (V-5)$$

Où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide,  $a$  la diffusivité thermique du fluide et  $D$ , le coefficient de diffusion moléculaire du soluté dans le fluide.

$\vec{V}$  est le vecteur vitesse de composantes  $(U, V)$ ,  $\vec{g}$  désigne l'accélération de la pesanteur.

La masse volumique  $\rho$  du fluide, dont la variation est prise en compte uniquement dans le terme de poussée d'Archimède (approximation de Boussinesq), est exprimée en fonction de la température et de la concentration par l'approximation linéaire du premier ordre suivante [1]:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0) \right] \quad (V-6)$$

où :  $\rho_0$  est la masse volumique relative aux grandeurs  $T_0$  et  $C_0$  respectivement température et concentration de référence données par :

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

alors que  $\beta_t$  et  $\beta_c$  sont respectivement les coefficients d'expansion volumique thermique et massique définis par [1] :



$$b_T = -\frac{1}{r_0} \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial T} \right)_{P,C}$$

$$b_C = -\frac{1}{r_0} \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial C} \right)_{P,T}$$

Quant à la viscosité cinématique  $\nu$ , la diffusivité thermique  $\alpha$  du fluide ainsi que la fonction  $F(T, C)$ , elles sont données par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{l}{\rho \cdot c_p}$$

$$F(T, C) = [\beta_r \cdot (T - T_0) + \beta_c \cdot (C - C_0)]$$

Où :  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $l$  sa conductivité thermique et  $c_p$  sa capacité calorifique massique à pression constante.

### V-5. Conditions aux limites :

L'ensemble des équations précédentes est complété par conditions aux limites relatives aux parois verticales et horizontales de la cavité. Elles s'écrivent :

- Sur les parois verticales  $x=0$  et  $x=L$  ( $0 = y = H$ ) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}(0,y) = \vec{V}(L,y) = \vec{0} \\ T(0,y) = T_1 \quad \text{et} \quad C(0,y) = C_1 \\ T(L,y) = T_2 \quad \text{et} \quad C(L,y) = C_2 \end{aligned} \right\} \quad (V-7)$$

- Sur les parois horizontales  $y=0$  et  $y=H$  ( $0 = x = L$ )

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}(x,0) = \vec{V}(x,H) = \vec{0} \\ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(x,0)} = \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{(x,H)} = 0 \\ \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{(x,0)} = \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{(x,H)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (V-8)$$

En considérant que la vitesse est nulle sur les parois de la cavité, nous admettons, dans cette étude, que l'espèce diffusante est très diluée (*Trevisan et al.1985, 1986,1987 ; Nield et al.1992*). [2, 3, 4, 5]

## V-6. Formes adimensionnelles des équations :

L'analyse du mouvement convectif se fait habituellement en introduisant des grandeurs dimensionnelles en vue de lui octroyer un caractère général et de réduire le nombre de paramètres régissant ce phénomène . Ces grandeurs sont issues d'une nouvelle écriture du système d'équations gouvernant le phénomène en fonction de nouvelles variables, dites réduites qui sont obtenues en choisissant une échelle de référence relative aux variables dimensionnelles.

Les équations sont simplifiées à l'aide des grandeurs dimensionnées selon les échelles caractéristiques suivantes :

- la hauteur  $H$  de la cavité,
- les différences maximales de température et de concentration entre les parois verticales sont respectivement  $(T_1-T_2)$  et  $(C_1-C_2)$ .
- La vitesse  $\frac{a}{H}$  (utilisation légitime puisque, en régime laminaire, le phénomène de diffusion n'est pas négligeable par rapport au phénomène de poussée).
- Le temps  $\frac{H^2}{a}$
- La pression  $\frac{r \cdot a^2}{H^2}$

### V-6-1. L'équation du mouvement suivant $\overline{Ox}$ :

Les quantités adimensionnelles résultantes sont les suivantes :

$$X^* = X/H,$$

$$Y^* = Y/H,$$

$$t^* = t/(H^2/a)$$

$$U^* = U/(a/H)$$

$$V^* = V/(a/H)$$

$$P^* = P/(a^2/H^2)$$

Notre équation adimensionnelle finale est de la forme :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \left[ \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\partial P^*}{\partial x^*}$$

### V-6-2. L'équation du mouvement suivant $\vec{oy}$ :

En ajoutant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad C^* = \frac{C - C_0}{C_1 - C_2}$$

Notre équation adimensionnelle finale est de la forme :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \left[ \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \right] + Ra \cdot \text{Pr} \cdot T^* + \frac{Ra_c \cdot Sc}{Le^2} \cdot C^* + \frac{\partial P^*}{\partial x^*} \quad (\text{V-10})$$

Et elle peut être écrite aussi, sous la forme :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} \right] = \text{Pr} \left[ \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \right] + Ra \cdot (\text{Pr} \cdot T^* + \frac{N \cdot Sc}{Le^2} \cdot C^*) + \frac{\partial P^*}{\partial x^*}$$

### V-6-3. L'équation de chaleur :

En ajoutant la quantité adimensionnelle suivante :

$$T^* = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

Notre équation s'écrira :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial T^*}{\partial t} + U^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x} + V^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (V-11)$$

Et elle peut être écrite aussi sous la forme : (puisque :  $1/Pr = Le/Sc$ )

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial T^*}{\partial t} + U^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x} + V^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial y} \right] = \frac{Le}{Sc} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

### III-6-4. L'équation de concentration chimique :

En ajoutant la quantité adimensionnelle suivante :

$$t^* = t / (H^2 / ?)$$

$$V^* = V / (? / H)$$

$$C^* = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

Notre équation s'écrira :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial C^*}{\partial t} + U^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x} + V^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial y} \right] = \frac{1}{Le \cdot Pr} \left[ \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

Et elle peut être écrite aussi sous la forme :

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial C^*}{\partial t} + U^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x} + V^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial y} \right] = \frac{1}{Sc} \left[ \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (V-12)$$

### V-7. Conditions aux limites (après l'adimensionnalisation) :

A ce système d'équations viennent s'ajouter les équations donnant les conditions aux limites en fonction des nouvelles variables adimensionnelles comme suit :

- Sur les parois verticales  $x=0$  et  $x=1$  pour  $(0 = y = 1)$  :

$$\begin{array}{l}
 V(0,y)=V(1,y)=0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 T(0,y)=1 \quad \text{et} \quad C(0,y)=1 \\
 T(1,y)=0 \quad \text{et} \quad C(1,y)=0
 \end{array} \right\} \quad \text{(III-13)}
 \end{array}$$

Sur les parois horizontales  $y=0$  et  $y=1$  ( $0 = x = 1$ )

$$\begin{array}{l}
 V(x,0)=V(x,1)=0 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,0)}=\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,1)}=0 \\
 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{(x,0)}=\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{(x,1)}=0
 \end{array} \right\} \quad \text{(V-14)}
 \end{array}$$

Cette nouvelle formulation des équations met en évidence les grandeurs caractéristiques adimensionnelles dont dépendent les convections naturelles thermique et massique étudiées et qui sont [6]:

- le nombre de *Prandtl* :  $Pr = \frac{\nu}{a}$
- le nombre de *Schmidt* :  $Sc = \frac{\nu}{D}$
- le nombre de *Rayleigh thermique* :  $Ra = \frac{g \cdot b_T \cdot \Delta T \cdot H^3}{a \cdot \nu}$

- le nombre de *Rayleigh matière*:  $Ra_c = \frac{g \cdot b_c \cdot \Delta C \cdot H^3}{D \cdot n}$
- le nombre de *Lewis* :  $Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{a}{D}$
- le rapport des effets volumiques d'*Archimède* :  $N = \frac{b_c \cdot \Delta C}{b_T \cdot \Delta T} \equiv \frac{Ra_c}{Ra}$

Ces différentes grandeurs adimensionnelles sont définies à partir des caractéristiques physiques relatives au fluide ( $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ , etc.).

A ces grandeurs adimensionnelles gérant le mouvement du fluide qui apparaissent explicitement dans les équations régissant le mouvement, viennent s'ajouter le caractère géométrique suivant de la cavité :

- le rapport de forme de la cavité :  $A = \frac{H}{L}$

### V-8. Coefficients d'échanges thermique et massique et nombres de Nusselt et de Sherwood :

Les échanges thermique et massique, ayant lieu entre le fluide et les parois verticales chaude ( $x=0$ ) et froide ( $x=L$ ) de la cavité, sont évalués à l'aide des nombres de *Nusselt* et de *Sherwood* locaux donnés par [6]:

$$\left. \begin{aligned} Nu(y) &= \frac{h_c(y) \cdot L}{l} \\ Sh(y) &= \frac{h_d(y) \cdot L}{D} \end{aligned} \right\} \quad (V-15)$$

où  $h_c(y)$  et  $h_d(y)$  sont respectivement les coefficients d'échanges locaux par convection thermique et massique,  $l$  est la conductivité du fluide et  $D$  est sa diffusivité moléculaire.

Les coefficients d'échanges locaux, le long des parois verticales chaude ( $x=0$ ) et froide ( $x=L$ ) de la cavité, sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} h_c(y) &= \frac{-l}{(T_1 - T_2)} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0,L} \\ h_d(y) &= \frac{-D}{(C_1 - C_2)} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0,L} \end{aligned} \right\} \quad (V-16)$$

Les valeurs moyennes de ces coefficients, pour une surface totale d'échange  $S$ , sont données par :

$$\left. \begin{aligned} [h_c]_m &= \frac{1}{S} \int_S h_c(y) \cdot dS \\ [h_d]_m &= \frac{1}{S} \int_S h_d(y) \cdot dS \end{aligned} \right\} \quad (V-17)$$

Quant aux valeurs moyennes des nombres de *Nusselt* et de *Sherwood*, le long des parois verticales chaude et froide, elles sont évaluées par :

$$\left. \begin{aligned} Nu_m &= \frac{[h_c]_m \cdot L}{l} = -\frac{1}{A_\epsilon} \int_0^{Ar} \left( \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{x=0,1} \cdot dy \\ Sh_m &= \frac{[h_d]_m \cdot L}{D} = -\frac{1}{A_\epsilon} \int_0^{Ar} \left( \frac{\partial C}{\partial X} \right)_{x=0,1} \cdot dy \end{aligned} \right\} \quad (V-18)$$

avec :  $A_\epsilon$  est la surface d'échange.

Notons que les nombres de *Nusselt* comme de *Sherwood* locaux et moyens ne sont pas déduits directement des équations régissant mais sont liés aux gradients thermique et massique régnant au voisinage des parois verticales chaude et froide. Ces gradients dépendent étroitement des grandeurs adimensionnelles dont dépend également la convection thermosolutale étudiée ( $Ra$ ,  $Pr$ ,  $Le$ , etc.)

---

## Conclusion

---

Après les démonstrations précédentes, nous remarquons que les deux équations ci-dessous (Eq. de la chaleur et Eq. de la concentration massique) se ressemblent.

$$\frac{dC}{dt} - D\nabla^2 C = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} - \frac{l}{r \cdot c_p} \nabla^2 T = 0$$

L'équation étant la même, on reprendra certaines conclusions (en gardant à l'esprit les hypothèses de faible concentration et d'incompressibilité, tout comme l'équation de la chaleur ci-dessus est valable pour les faibles échauffements et en incompressible), dont celle sur le découplage entre le flot et la diffusion de masse.

La concentration est sans dimensions... On voit que  $D$  est homogène à  $v$ . On pose:

$$Sc = \nu/D$$

le nombre de *Schmidt* (analogue de *Prandtl*). Il sera aussi d'ordre un dans les gaz. On peut définir un nombre de *Péclet* massique (Qui sera donc le nombre de *Reynolds* fois le nombre de *Schmidt*). On définit aussi le nombre de *Lewis*:

$$Le = Sc/Pr$$

Le flux de concentration à la paroi permet de définir le nombre de *Sherwood* (analogue du *Nusselt*) [6]:

$$Sh = -L \partial c / \partial x$$



---

---

## Références

1. **BEJAN (A.)**, « Convection heat transfer ». John Wiley and Sons, *New York*, 198.
2. **TREVISAN (O.V.) et BEJAN (A.)**, « Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in porous medium », *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.28m 1579-1611. (1985).
3. **TREVISAN .V. et BEJAN A.**, « Masse and heat transfer by natural convection in a vertical slot with porous midium », *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol. 29,403,-415
- 4 . **TREVISAN. (V.) et BEJAN (A.)**, « Mass and heat transfer by high Rayleigh number convection in a porous medium heated from below », *int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, 2341-2356.
5. **NIELD (D.A.) et BEJAN (A.)**, « Convection in porous media », *Springer-Verlag New York. Inc*, (1992).
6. **JEAN FRANCOIS SACADURA**,« Initiation aux transfert thermiques ».Ed : *TECHNIQUE ET DOCUMENTATION*.1980.

**Modèle 2 :**

**MODELISATION D'UN  
SECHOIR**

---

---

## DESCRIPTION ET MODELISATION DU SECHOIR

### VI-1. INTRODUCTION

Le séchage convectif à basse température est un phénomène complexe, où interviennent de nombreux autres phénomènes qui ressortent de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et des transferts de masse et de chaleur.

La description des phénomènes couplés de transferts de chaleur et de masse en milieu poreux est généralement effectuée à l'aide d'un système d'équations qui a été proposé il y a environ deux décennies par Luikov et Philip-de-Vries. Une étude fondamentale de ces transferts a fait l'objet de plusieurs travaux, dans le séchage du bois, pour le séchage du riz-paddy, pour le séchage du maïs. Ainsi, plusieurs modèles complexes traduisant mathématiquement les phénomènes physiques de séchage ont été proposés. Des corrélations empiriques ont été obtenues à partir de cinétiques de séchage expérimentales, pour la patate douce en lit de particules, en fonction des paramètres aérothermiques de l'air et des caractéristiques géométriques du produit. Compte tenu des variétés de produits animaux et végétaux différentes l'une de l'autre, à partir de courbes qui représentent les points expérimentaux des cinétiques de séchage, on peut proposer des formules de celles-ci sous forme de polynôme ou autre [1]. Dans le cas du séchage des produits agroalimentaires, le fluide séchant qui est l'air chauffé. Cet air est acheminé vers l'armoire de séchage contenant des claies où sont disposés les produits (légumes, fruits, poissons, etc.) en lit de particules, sur des grilles perforées.

---

## VI-2. MODELISATION

### VI-2-1. DESCRIPTION

Les modèles mathématiques de la convection forcée dans les séchoirs solaires s'appuient sur les équations de conservation de la chaleur et de la masse [1,2]. Une méthode pour modéliser un tel séchoir consiste à le découper en tranches successives égales de sections perpendiculaires à l'écoulement d'air, contenant chacune en son centre, un lit de produit à sécher (Fig. 3.1).

La figure (3.1) représente les échanges thermiques dans un lit où l'on suppose valables les hypothèses suivantes :

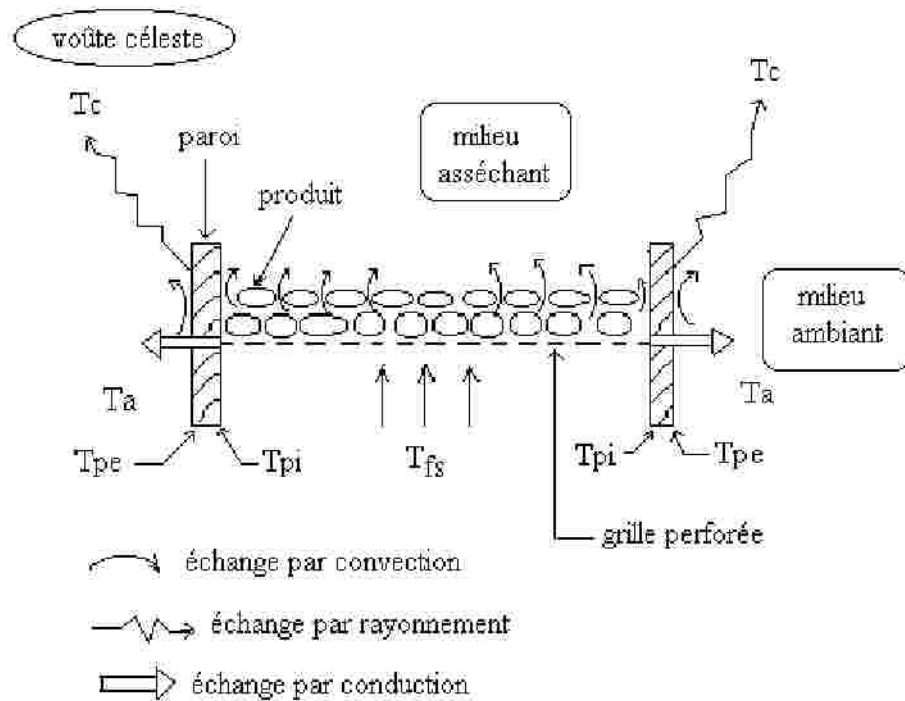
On néglige :

- les échanges radiatifs à l'intérieur du séchoir,
- les variations temporelles de la température et de l'humidité de l'air, à l'intérieur d'un lit, devant leurs variations spatiales dans le sens de l'écoulement,
- l'échange par conduction entre les particules du produit à sécher et ses variations dues au tassement du produit en cours de séchage,
- Les variations de la porosité apparente et de la surface d'échange entre l'air et le produit, dans le pas de temps que l'on fixera par la suite lors de la discrétisation des équations.

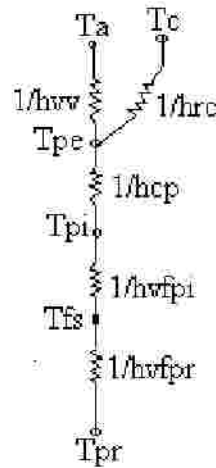
On suppose que :

- l'écoulement de l'air est unidirectionnel et uniforme,
- la température et la teneur en eau d'une particule sont homogènes,
- les températures des parois intérieures et extérieures d'une claie sont uniformes.

On utilisera, pour décrire les échanges thermiques, les analogies électriques (Fig 3.2), afin de faciliter l'écriture des équations et de mieux visualiser les échanges thermiques au sein d'un lit d'indice  $j$ .



**Fig.1.** Echanges thermiques dans le lit de rondelles de pomme de terre [1]



**Fig.2.** Schéma électrique relatif à un lit de particules

## VI-2-2. MISE EN EQUATION

### VI-2-2.1. ECHANGE ENTRE L’AIR ET LES PAROIS DU SECHOIR

#### VI-2-2-1.1. AU NIVEAU DU LIT DE PARTICULES

Dans le bâtiment, pour résoudre l’équation de propagation de la chaleur dans les parois, on utilise souvent l’approximation des masses thermiques couplées qui suppose, dans l’hypothèse de conduction unidirectionnelle, que le mur est découpé en plusieurs nœuds de températures (généralement 10 nœuds). La résolution de cette équation s’obtient en utilisant la méthode des différences finies, avec une approche par discrétisation spatiale. Les profils de températures obtenus, à l’intérieur des murs, sont généralement cohérents avec ceux obtenus par des méthodes analytiques.

Sachant que la paroi du séchoir utilisé est faible (1, cm), en utilisant l'hypothèse de masses couplées pour la résolution de l'équation de la chaleur, on suppose que cette paroi est divisée en deux masses à températures uniformes  $T_{pi}$  et  $T_{pe}$ , séparées par une conductance thermique  $h_{cp}$ . Vers la face intérieure, il y a un échange par convection avec l'air asséchant et vers l'extérieur, un échange convectif dû au vent et un échange radiatif avec la voûte céleste.

En supposant que la surface d'échange de la paroi intérieure notée «  $S_p$  », est la même que la surface d'échange de la surface extérieure de l'armoire, les équations au niveau des parois dans un lit s'écrivent [1] :

- Echange entre l'air asséchant et la paroi intérieure :

$$\frac{1}{2} r_b e_b C_{pb} \frac{dT_{pi}}{dt} = -h_{cp} (T_{pi} - T_{pe}) + h_{vfp_i} (\bar{T}_{fs} - T_{pi}) \quad (1)$$

$\bar{T}_{fs}$  étant la température moyenne de l'air asséchant dans le lit.

- Echange entre l'environnement et la paroi extérieure :

$$\frac{1}{2} r_b e_b C_{pb} \frac{dT_{pe}}{dt} = -h_{rc} (T_{pe} - T_c) + h_{cp} (T_{pi} - T_{pe}) - h_{vv} (T_{pe} - T_a) \quad (2)$$

### VI-2-2-1-2. ENTRE DEUX LITS DE PARTICULES

Sachant que la vitesse débitante est plus faible que la vitesse moyenne à l'intérieur du lit de particules et la distance entre deux lits est plus grande que l'épaisseur d'un lit, entre deux lits les pertes à travers les parois du séchoir sont donc plus importantes et nécessitent d'être prises en compte dans le modèle mathématique.

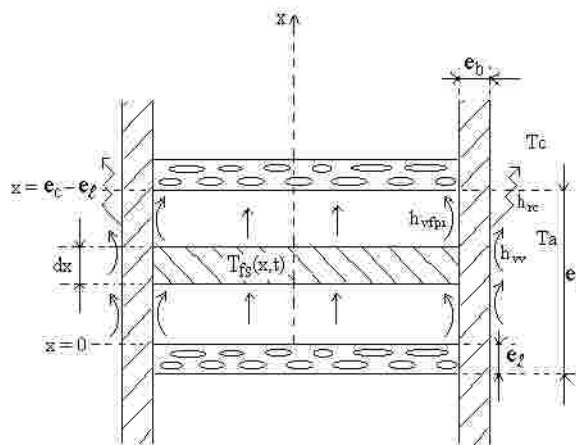
Considérons une tranche « dx » (voir Fig. 2a). Si « H » est le coefficient d'échange moyen à travers les parois du séchoir,  $T_{fs}$  est la température de l'air de caractéristiques thermophysiques  $\rho_s$  et  $Cp_s$ ,  $T_a'$  est la température équivalente extérieure (voir Fig. 2b), pour une tranche de fluide d'épaisseur dx de section transversale  $A_s$  et de périmètre  $P_s$ , nous pouvons écrire la variation dQ pendant le temps dt de la quantité de chaleur contenue dans cette tranche sous la forme:

$$dQ = A_s dx dt r_f Cp_f dT_{fs} = -P_s dx dt f = -P_s dx dt H (T_{fs} - T_a')$$

f étant le flux sortant de la tranche par les parois latérales.

Finalement, on obtiendra :

$$\frac{\partial T_{fs}}{\partial t} + v_{fs} \frac{\partial T_{fs}}{\partial x} = \frac{P_s H}{A_s r_f Cp_f} (T_a' - T_{fs})$$



**Fig.3-a.** Représentation schématique des échanges entre deux lits de particules

En négligeant la variation temporelle de la température devant sa variation spatiale et pour  $A_s = L_s.l_s$  et  $P_s = 2(L_s + l_s)$ , où  $L_s$  et  $l_s$  sont respectivement la longueur et la largeur du séchoir, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial T_{fs}}{\partial x} + B T_{fs} = B T_a' \quad \text{avec } B = \frac{2(L_s + l_s)H}{L_s l_s r_f Cp_f v_{fs}}$$



Dont la solution est de la forme :  $T_{fs}(x, t) = A e^{-Bx} + T'_a$

pour  $x = 0$  :  $A = T_{fs}(0, t) - T'_a$

l'équation finale s'écrit :

$$T_{fs}(x, t) = (T_{fs}(0, t) - T'_a) e^{-Bx} + T'_a$$

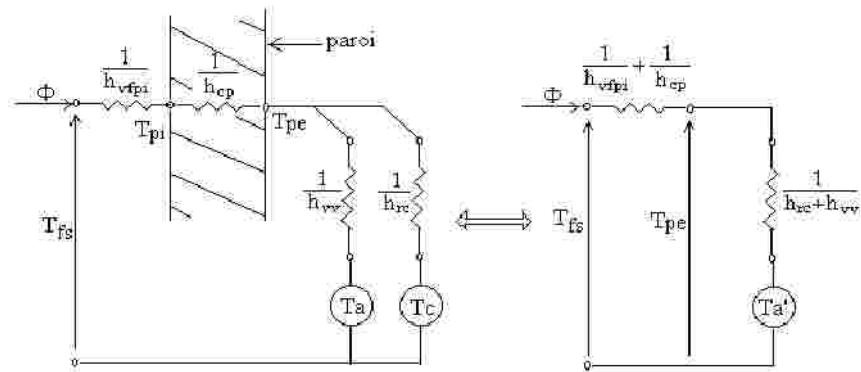
Lorsque  $e_c$  et  $e_l$  sont respectivement la distance entre deux grilles et la hauteur du lit de particules, nous pouvons écrire pour  $x = e_c - e_l$  :

$$T_{fs}(x = e_c - e_l, t) = (T_{fs}(0, t) - T'_a) e^{-B(e_c - e_l)} + T'_a \quad (2')$$

Entre deux lits de particules, nous ne tenons pas compte de l'inertie thermique des parois. Nous éliminons la température superficielle  $T_{pi}$  de la paroi intérieure pour obtenir directement la dépendance spatiale (Equation 2'). Par contre, dans le lit, le coefficient d'échange convectif  $h_{vfp_i}$  entre l'air et la paroi dépend fortement de la température superficielle  $T_{pi}$  de la paroi intérieure en cours de séchage. Ceci est dû aux variations des paramètres, consécutives au phénomène de rétrécissement volumique du produit, en particulier de la porosité apparente du lit. Ce qui nous force donc à conserver comme inconnues les températures superficielles  $T_{pi}$  et  $T_{pe}$  et rend malaisé l'utilisation du modèle employé entre deux lits de particules.

### § Détermination du coefficient d'échange global « H » à travers la paroi du séchoir

En utilisant les analogies électriques (Fig. 3-b), on peut déterminer le coefficient « H » moyen à travers les parois du séchoir.



**Fig. 3-b.** Schéma électrique équivalent aux échanges à travers les parois du séchoir

La tension de thevenin « Ta' » s'écrit :

$$T_a' = \frac{\frac{T_a}{h_{rc}} + \frac{T_c}{h_{vv}}}{\frac{1}{h_{rc}} + \frac{1}{h_{vv}}} = \frac{T_a h_{vv} + T_c h_{rc}}{h_{vv} + h_{rc}}$$

Le flux  $f$  ayant pour expression :

$$f = H(T_{fs} - T_a') \quad \text{avec} \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{h_{vfpi}} + \frac{1}{h_{cp}} + \frac{1}{h_{rc} + h_{vv}}$$

### VI-2.3. EQUATIONS DE LA CHALEUR DES DEUX PHASES DU PRODUIT POREUX

L'influence de la diminution de volume « Shrinkage » au cours du séchage du produit et les variations de ses propriétés physiques et thermiques, sont prises en compte dans le modèle théorique, combinée aux transferts de chaleur et de masse [3], décrits par ailleurs dans plusieurs études antérieures, citons :

- La détermination de l'humidité absolue à base sèche et la température au sein d'un cube de produit à sécher [1, 4]
- L'étude de l'influence de l'humidité absolue initiale de l'épaisseur de produit à sécher sur les cinétiques de séchage [1, 5],
- Le séchage solaire de particules de produit en couche épaisse [1, 6].

La prise en compte de ce phénomène de rétrécissement dans les équations de conservation de la chaleur des deux phases (gazeuse et solide) du modèle mathématique, nécessite d'explicitier des équations faisant apparaître quelques paramètres telles que : la porosité, la surface d'échange entre l'air et le produit, etc..

Ecrivons : 
$$r_f^* = r_{fs}^* + r_v^* = r_{fs}^* (1 + W) \quad \text{avec : } W = r_v^* / r_{fs}^*$$

$$r_{pr}^* = r_{prs}^* + r_e^* = r_{prs}^* (1 + M) \quad \text{avec : } M = r_e^* / r_{prs}^*$$

où :  $r_{(f, fs, v)}^* = e r_{(f, fs, v)}$  sont les masses volumiques apparentes

respectives, de l'air humide, de l'air sec et de la vapeur contenue dans l'air,

$$r_{(pr, prs, e)}^* = (1 - e) r_{(pr, prs, e)}$$

respectives, du produit humide, du produit sec et de l'eau du produit.

et  $\epsilon$  est la porosité apparente du lit de particules, définie par :

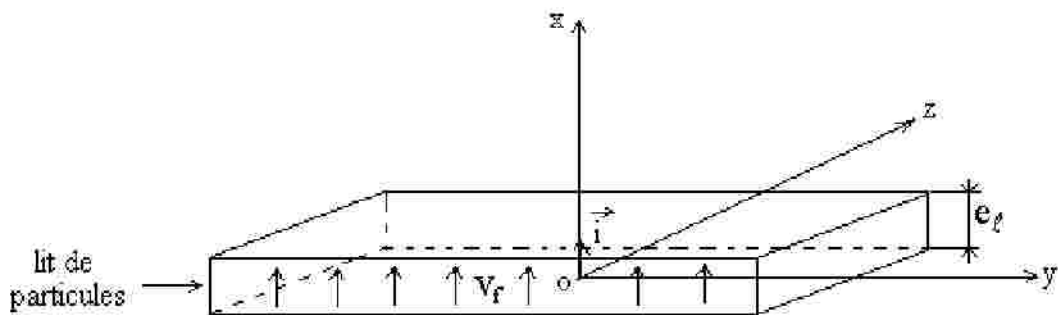
$$e = \frac{V_l - V_r}{V_l} \quad \text{où } V_l \text{ et } V_r \text{ sont respectivement le volume apparent du}$$

lit et le volume du produit solide.

A l'intérieur du lit (Fig. 3.c), on définit deux champs de températures tridimensionnels :

- le champ de température  $T_{fs}(x,y,z,t)$  de l'air,
- le champ de température  $T_{pr}(x,y,z,t)$  du produit.

Les deux champs sont des valeurs moyennes statistiques locales et dans ce cas peuvent être assimilés à des fonctions continues du point ; ils sont différents l'un de l'autre, en raison de la structure granulaire du produit, et ils obéissent à deux équations de propagation couplées.



**Fig. 3.c.** Schéma d'un lit de particules

### V-2-3-1. EQUATION DE PROPAGATION DANS L'AIR

On néglige la conduction de l'air et l'on ne retient que la convection.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial (r C_p)_f^* T_{fs}}{\partial t} + \text{div} \left( (r C_p)_f^* T_{fs} \vec{v}_f \right) = P(x, y, z, t)$$

où  $P(x,y,z,t)$  est un terme de sources volumiques internes que nous expliciterons par la suite

Si nous intégrons cette relation sur tout le volume du lit ( $V_l$ ), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_l} (r Cp)_f^* T_{fs} dV + \iiint_{V_l} \text{div} \left( (r Cp)_f^* T_{fs} \vec{v}_f \right) dV = \iiint_{V_l} P(x, y, z, t) dV$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial}{\partial t} \overline{(r Cp)_f^* T_{fs}} + \frac{1}{V_l} \iint_{(S)} (r Cp)_f^* T_{fs} \vec{v}_f \cdot \vec{dS} = \frac{1}{V_l} \iiint_{V_l} P(x, y, z, t) dV \quad (3)$$

où : (S) est la frontière du domaine : elle se compose des parois latérales, où la vitesse est orthogonale à  $\vec{dS}$  et des deux faces d'entrée et de sortie.

Le terme  $\overline{(r Cp)_f^* T_{fs}}$  représente la valeur moyenne spatiale du champ  $(r Cp)_f^* T_{fs}$  dans le lit, qui n'est fonction que du temps t.

La vitesse de l'air étant considérée comme constante et dirigée suivant ox :  $\vec{v}_f = v_f \vec{i}$ , le deuxième terme du premier membre de l'équation (3), peut s'écrire :

$$\frac{v_f}{e_l} \left( \overline{(r Cp)_f^* T_{fs}} \Big|_{\text{sortie}} - \overline{(r Cp)_f^* T_{fs}} \Big|_{\text{entrée}} \right)$$

où

$e_l$  est l'épaisseur du lit,  $\overline{(r Cp)_f^* T_{fs}} \Big|_{\text{sortie}}$  est le produit de la température avec la capacité calorifique volumique de l'air à la sortie du lit, moyenné sur la section de l'armoire ; de même pour l'air à l'entrée du lit  $\overline{(r Cp)_f^* T_{fs}} \Big|_{\text{entrée}}$ .

Le deuxième membre de l'équation (3) représente la valeur moyenne spatiale de toutes les sources volumiques ; Il se compose de deux parties :

- L'échange de chaleur entre le produit et l'air :

Localement on peut écrire :  $P_1 = \frac{S_{fpr}}{V_{air}} h_{vfpr} (T_{pr} - T_{fs})$  où  $S_{fpr}$  est la surface

moyenne de contact, entre l'air et le produit, qu'on peut considérer uniforme dans le lit mais dépendante du temps à cause du phénomène de rétrécissement en cours de séchage,  $h_{vfpr}$  est un coefficient d'échange convectif ayant les mêmes propriétés.

- L'échange entre l'air et les quatre parois latérales : Il ne s'agit pas en fait d'une source volumique, mais d'une source superficielle localisée sur les parois latérales ayant la forme d'une distribution

$P_2(\vec{r}, t) = \iint_{(S_l)} \frac{h_{vfpi}}{V_{air}} (T_{fs}(\vec{r}', t) - T_{pi}(\vec{r}, t)) d(\vec{r} - \vec{r}')$  où l'intégration s'effectue

sur le point  $\vec{r}'$  appartenant à l'une des parois.

La moyenne sur le volume du lit de ces deux champs donne :

$$\overline{P_1} = \frac{S_{fpr} h_{vfpr}}{V_{air}} (\overline{T_{pr}} - \overline{T_{fs}}) \quad \text{et} \quad \overline{P_2} = -\frac{S_p h_{vfpi}}{V_{air}} (\overline{T_{fs}^*} - \overline{T_{pi}^*})$$

Expressions dans lesquelles  $\overline{T_{pr}}$  et  $\overline{T_{fs}}$  sont les moyennes dans le volume

du lit  $V_l$ , des champs  $T_{pr}(r,t)$  et  $T_{fs}(r,t)$ , et  $\overline{T_{fs}^*}$ ,  $\overline{T_{pi}^*}$  sont les moyennes,

sur les parois latérales, du champ de température  $T_{fs}(r,t)$  au voisinage de

celles-ci et du champ superficiel  $T_{pi}$  que l'on assimile à la température de

la masse thermique définie précédemment.

La variation spatiale du champ  $T_{fs}(r,t)$  au voisinage des parois latérales

étant rapide, on peut remplacer  $\overline{T_{fs}^*}$  par  $\overline{T_{fs}}$  (sa moyenne volumique).

L'équation (3) prend, avec ces définitions, la forme (pratiquement rigoureuse) suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(r Cp)_f T_{fs}} + v_f \left( \frac{\overline{(r Cp)_f T_{fs}}_{\text{sortie}} - \overline{(r Cp)_f T_{fs}}_{\text{entrée}}}{e_l} \right) = \frac{S_{fpr} h_{vfpr}}{V_{air}} (\overline{T_{pr}} - \overline{T_{fs}}) - \frac{S_p h_{vfpi}}{V_{air}} (\overline{T_{fs}} - T_{pi})$$

Les températures variant lentement dans le temps, on néglige généralement la dérivée par rapport au temps ; en admettant également que :

$$\overline{(r Cp)_f T_{fs}}_{\text{sortie/entrée}} \cong \overline{(r Cp)_f T_{fs}}_{\text{sortie/entrée}} \quad \text{où } \overline{(r Cp)_f} \text{ est supposé}$$

identique sur les deux faces d'entrée et de sortie, donc en fait égal à sa moyenne volumique, on obtient :

$$v_f \overline{(r Cp)_f} \left( \frac{\overline{T_{fs}}_{\text{sortie}} - \overline{T_{fs}}_{\text{entrée}}}{e_l} \right) = \frac{S_{fpr} h_{vfpr}}{V_{air}} (\overline{T_{pr}} - \overline{T_{fs}}) - \frac{S_p h_{vfpi}}{V_{air}} (\overline{T_{fs}} - T_{pi})$$

Sachant que  $\overline{(r Cp)_f} = r_{fs}^* C_{p_{fs}} + r_{fs}^* C_{p_v} W$  est la capacité calorifique volumique apparente de l'air et  $G_s = r_{fs}^* v_f$  le débit massique surfacique [1, 7], il vient :

$$G_s V_{air} (C_{p_{fs}} + C_{p_v} W) \left( \frac{\overline{T_{fs}}_{\text{sortie}} - \overline{T_{fs}}_{\text{entrée}}}{e_l} \right) = S_{fpr} h_{vfpr} (\overline{T_{pr}} - \overline{T_{fs}}) - S_p h_{vfpi} (\overline{T_{fs}} - T_{pi}) \quad (4)$$

### III.2-3-2. EQUATION DE PROPRIÉTÉ DANS LE PRODUIT

On peut procéder de la même manière pour établir l'équation vérifiée par le champ de température moyen dans le produit.

L'équation de la chaleur dans le produit pour le champ tridimensionnel s'écrirait :

$$\frac{\partial (r C_p)_{pr}^* T_{pr}}{\partial t} - \text{div} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} = h_{vfpr} \frac{S_{fpr}}{V_l} (T_{fs} - T_{pr}) + L_v \frac{\partial r_{pr}^*}{\partial t}$$

En intégrant cette relation sur tout le volume du lit, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(r C_p)_{pr}^* T_{pr}} - \frac{1}{V_l} \iint_{(s)} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{dS} = h_{vfpr} \frac{S_{fpr}}{V_l} (\overline{T_{fs}} - \overline{T_{pr}}) + L_v \frac{\partial r_{pr}^*}{\partial t} \quad (5)$$

L'intégrale double dans le deuxième terme du premier membre s'écrit :

$$\iint_{(s)} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{dS} = \iint_{(s_{latérale})} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{dS} + \iint_{(s_{entrée})} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{N} dS + \iint_{(s_{sortie})} l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{N} dS$$

où :  $\vec{N}$  représente le vecteur normal à la section considérée

- On élimine le premier terme pour la raison suivante : La surface de contact étant très faible, on néglige la conduction entre les particules et les parois latérales du séchoir.

- On élimine les deux autres termes pour la raison suivante : Le flux conductif au niveau de la section d'entrée et de sortie du lit de particules ( $l_{pr} \vec{\nabla} T_{pr} \cdot \vec{N}$ ) étant proportionnel à la différence de températures ( $T_{pr} - T_{fs}$ ), il apparaît un coefficient d'échange convectif « H ». On admet que ce coefficient est faible ( $H \sim 0$ ), du fait que la vitesse du fluide au voisinage de cette section, lui est orthogonale et il n'existe pas de couche limite thermique dans laquelle la conduction dans le fluide dominerait sur la convection.



En admettant que  $\overline{(r Cp)_{pr}^* T_{pr}} \cong \overline{(r Cp)_{pr}^*} \overline{T_{pr}}$ , et en négligeant la dérivée par rapport au temps de la capacité calorifique volumique apparente moyenne du produit, en raison de la faible variation de la température dans le temps, l'équation (3.5) peut s'écrire :

$$\overline{(r Cp)_{pr}^*} \frac{\partial \overline{T_{pr}}}{\partial t} = h_{vfpr} \frac{S_{fpr}}{V_l} (\overline{T_{fs}} - \overline{T_{pr}}) + L_v \frac{\partial}{\partial t} r_{pr}^*$$

Sachant que la capacité calorifique volumique apparente moyenne du produit  $\overline{(r Cp)_{pr}^*} = r_{prs}^* Cp_{prs} + r_{prs}^* Cp_e M$ , l'équation précédente devient :

$$(1-e) r_{prs} (Cp_{prs} + Cp_e M) \frac{d\overline{T_{pr}}}{dt} = h_{vfpr} \frac{S_{fpr}}{V_l} (\overline{T_{fs}} - \overline{T_{pr}}) + (1-e) L_v r_{prs} \frac{dM}{dt} \quad (6)$$

- La capacité calorifique massique de la pomme de terre déterminée par Wang et Brennan (1993) [1, 8]. Elle dépend de la teneur en humidité absolue du produit ainsi que de la température de séchage et est formulée comme suit :

$$Cp_{pr} = 4,18 \cdot 10^3 (0,406 + 0,00146 T_{fs} + 0,203M - 0,0249 M^2) \quad (7)$$

- La masse volumique du produit sec est donnée par :

$$r_{prs} = \frac{r_{pr}}{1 + M}$$

- La chaleur latente de vaporisation de l'eau s'écrit :

$$L_v = 4,18 \cdot 10^3 (597 - 0,56 T_{pr})$$

### V-2-2-3. EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE

L'équation générale de conservation de la masse appliquée à l'air humide s'écrit :

$$\frac{\partial r_f^*}{\partial t} + \text{div } r_f^* \vec{v}_f = s_f$$

où :

$\sigma_f$  est l'amplitude volumique de la source de masse d'air humide  
 $v_f$  est la vitesse de l'air supposée constante.

La masse volumique apparente  $r_{fs}^*$  de l'air sec étant constante, en comptant les abscisses  $x$  dans le sens de l'écoulement, l'équation de conservation de la masse appliquée à l'air devient :

$$r_{fs}^* \frac{\partial W}{\partial t} + r_{fs}^* v_f \frac{\partial W}{\partial x} = s_f$$

L'équation générale de conservation de la masse du produit solide immobile s'écrit :

$$\frac{\partial r_{pr}^*}{\partial t} = s_{pr} = r_{prs}^* \frac{\partial M}{\partial t}$$

où :  $\sigma_{pr}$  est l'amplitude volumique de la source de masse du produit,  
 $r_{prs}^*$  étant constante.

Sachant que :

$$s_f = -s_{pr}$$

et en admettant que  $\frac{\partial W}{\partial t}$  est petit devant  $r_{fs}^* v_f \frac{\partial W}{\partial x}$ , il vient :

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{G_s} (1-e) r_{prs}^* \frac{dM}{dt} \quad (8)$$

### V-3. VITESSE DE SECHAGE

Le modèle de transfert de Combes [9, 1], utilisant les analogies électriques, considère un volume délimité par une portion de produit et une partie de l'air asséchant en contact avec lui (Fig. 3). Il se produit deux transferts en série :

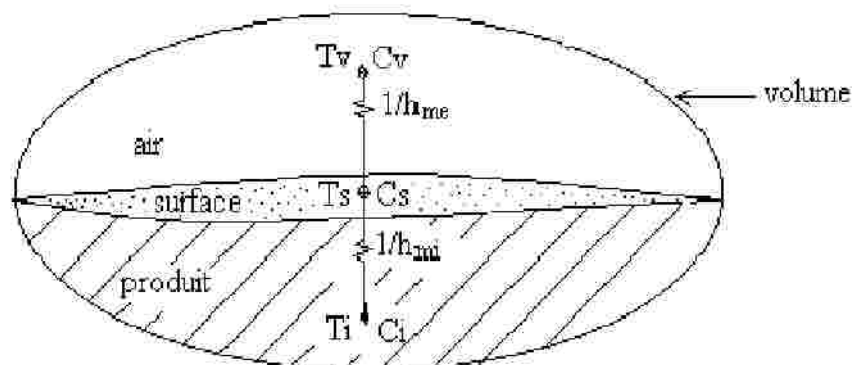
- un transfert d'humidité entre l'intérieur du produit et sa surface libre, caractérisé par une résistance  $1/h_{mi}$  et les potentiels  $C_i$  intérieur et  $C_s$  superficiel,
- un transfert de masse externe entre la surface du produit et l'air, caractérisé par une résistance  $1/h_{me}$  et les potentiels  $C_s$  superficiel et  $C_v$  extérieur.

Où :  $C_v$  est la fraction massique de la vapeur d'eau dans l'air,

$C_s$  est la fraction massique de la vapeur d'eau à la surface,

$C_i$  est la fraction massique de l'eau dans le produit,

$T_v$ ,  $T_s$  et  $T_i$  sont les températures correspondantes.



**Fig. 3.** Représentation schématique des transferts d'humidité

Le coefficient de transfert de masse global  $H_m$  s'exprime en fonction de  $h_{me}$  et  $h_{mi}$  par :

$$H_m = \frac{h_{me} \cdot h_{mi}}{h_{me} + h_{mi}} \quad (9)$$

Pour la totalité du produit disposé en lit sur une grille, la vitesse de séchage s'exprime:

$$\dot{m}_e = - m_{prs} \cdot dM/dt = H_m \cdot \rho_f \cdot S_{fpr} \cdot (C_i - C_v) \quad (10)$$

En utilisant les pressions partielles plutôt que les concentrations [1], l'expression de la vitesse de séchage devient :

$$- m_{prs} \cdot dM/dt = H_m \cdot [P_{sat}(T_{pr}) - P_v(T_{fs})] \cdot S_{fpr} / (R_v \cdot (T_{fs} + 273)) \quad (11)$$

Où :  $P_{sat}(T_{pr})$  est la pression de vapeur d'eau saturante à la température

$T_{pr}$  de la surface du produit en Pascals,

$P_v(T_{fs})$  est la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air en

Pascals.

## V-4. COEFFICIENTS D'ÉCHANGE THERMIQUE ET MASSIQUE

### V-4-1. TRANSFERT THERMIQUE

Pour déterminer les divers coefficients d'échange thermique "h", les relations suivantes sont utilisées, selon qu'il s'agit d'un transfert par conduction, par rayonnement ou par convection.

### V-4-1.1. Conduction

Le coefficient d'échange par conduction à travers la paroi de l'armoire de séchage (bois), est donné par :

$$h_{cp} = \frac{l_b}{e_b} \quad (12)$$

### V-4-1.2. Rayonnement

Le coefficient d'échange radiatif entre la paroi extérieure de l'armoire de séchage et la voûte céleste, où les températures sont en valeurs absolues, s'écrit [10, 1] :

$$h_{rc} = s e_b (T_{p_e} + T_c)(T_{p_e}^2 + T_c^2) \quad (13)$$

### V-4-1.3. Convection

On distingue deux types d'échanges convectifs : échange thermique dû au vent dont le coefficient est donné par l'équation (22) et les transferts thermiques intervenant dans l'armoire de séchage dont coefficients sont explicités ci-dessous :

#### - Echange thermique entre l'air et la paroi intérieure de l'armoire

En ce qui concerne la convection forcée, lorsque l'on considère l'air contenu dans un lit de particules d'épaisseur  $e_l$ , le coefficient d'échange s'écrit :

$$h_{v\pi} = \frac{Nu l_f}{e_l} \quad (14)$$

Le nombre de Nusselt est défini par [1, 10] :  $N_u = 0,66 Re^{0,5} Pr^{0,333}$ , pour un nombre de Reynolds :  $Re = v_f \frac{e_l}{n_f} \leq 3.10^5$ .

Lorsqu'il s'agit de l'air se trouvant dans une tranche séparée par deux lits de particules d'épaisseur  $(e_c - e_l)$ , dans l'équation (14) on remplace l'épaisseur  $e_l$  par  $(e_c - e_l)$  et la vitesse  $v_f$  par la vitesse débitante  $v_{fs}$ .

Les caractéristiques thermophysiques de l'air ( $\lambda_f$ ,  $v_f$  et  $\mu_f$ ) (Cf. Annexe 3) sont évaluées à la température  $(T_{fs} + T_{pi})/2$ . L'épaisseur du lit de particules s'écrit  $e_l = \frac{V_l}{L_s l_s}$ , où  $V_l$  est le volume apparent du lit.

**- Echange thermique entre l'air et le produit**

Pour ce qui est de l'échange par convection forcée entre le fluide caloporteur et le produit à sécher, où  $d_m$  est le diamètre moyen des particules, le coefficient d'échange est donné comme suit :

$$h_{vfpr} = \frac{N_u l_f}{d_m} \tag{15}$$

On retient la corrélation qui donne  $N_u = 0,37 Re^{0,6}$ , concernant les échanges thermiques entre des sphères entassées et de l'air en écoulement forcé autour d'elles, et pour une valeur de  $Re = v_f \frac{d_m}{n_f}$  comprise entre 17 et 70000 [11, 1].

$\lambda_f$  et  $v_f$  sont évaluées à la température  $(T_{fs} + T_{pr})/2$ .

- la vitesse moyenne de l'air à proximité du produit dans le lit de particules se calcule par :

$$v_f = \frac{v_{fs}}{e} \tag{16}$$

## V-4-2. TRANSFERT MASSIQUE

### V-4-2.1. Coefficient d'échange de matière externe

Le coefficient d'échange de masse extérieur entre le produit et l'air peut être calculé par la relation :

$$h_{me} = S_h \cdot (D_v / d_m) \quad (17)$$

On retient la relation de Ranz-Marshall rapportée dans [12] pour le calcul du nombre de Sherwood :

$$S_h = 2 + C \cdot R_{ep}^{1/2} \cdot S_c^{1/3} \quad (18)$$

Où  $S_c = v_f / D_v$  : est le nombre de Schmidt

$C$  : est une constante (0,6 pour une sphère unique, 1,16 pour un lit fluidisé et 1,8 pour un lit fixe correspond à notre cas).

- Le nombre de Reynolds relatif aux particules de produit s'écrit :

$$R_{ep} = (v_f \cdot d_m) / \nu_f \quad (19)$$

- La diffusivité de l'humidité dans l'air de séchage est donnée par la relation de Shirmer, valable entre 20 et 200°C :

$$D_v = 2,226 \cdot 10^{-5} \frac{1}{P_t} \left( \frac{T_{fs} + 273}{273} \right)^{1,81} \quad (20)$$

La pression atmosphérique  $P_t$  est exprimée en bar.

### V-4-2.2. Coefficient d'échange de matière interne propre au produit

On ne peut pas calculer théoriquement le coefficient d'échange de masse et d'humidité à l'intérieur du produit. Quinette [13] a donné deux formes pour le coefficient de transfert de masse à l'intérieur de la pomme, en supposant

qu'il ne dépend seulement que de sa teneur en eau, alors qu'en réalité il dépend aussi de sa température et d'une caractéristique géométrique. Citons l'une des formes utilisées par [14], qui s'écrit pour la pomme lorsque  $M > 1$  :

$$h_{mi} = \frac{M_0 - 1}{250 (M_0 - M)}$$

Zeghmati (1981) [15] a constaté que la température et la vitesse de l'air asséchant influent peu sur la valeur de ce coefficient de transfert, par contre celui-ci varie considérablement avec la teneur en eau de la pomme.

Ce coefficient dépend fonctionnellement de la teneur en humidité  $M$  du produit et de sa température  $T_{pr}$ . En admettant que le produit est homogène et isotrope, on peut donc toujours écrire :

$$h_{mi} = h_{mi} \left( \frac{M}{M_0}, T_{pr} \right) \sim A_1 \frac{M}{M_0} + A_2 \left( \frac{M}{M_0} \right)^2 + A_3 \left( \frac{M}{M_0} \right)^3 + A_4 \left( \frac{M}{M_0} \right)^4 + \dots,$$

les coefficients  $A_i$  du développement dépendant de  $T_{pr}$ .

Nous admettons, que dans le cas de la pomme de terre qui se rétracte fortement lorsqu'elle sèche, le coefficient  $h_{mi}$  est négligeable pour  $M = 0$ .

Pour déterminer  $h_{mi}$ , nous considérons une couche fine de rondelles de pomme de terre disposée sur la première grille perforée de l'armoire de séchage traversée par de l'air en convection forcée. La batterie de chauffage est un capteur solaire relié à l'armoire, alimenté par une source lumineuse artificielle afin de maintenir la température de séchage constante tout au long du processus.



Adoptant la méthode utilisée par Quinette (1979) [1, 13], nous avons élaboré un modèle de calcul mathématique, issu des deux équations régissant le processus de séchage : L'équation de la chaleur dans les milieux poreux (Eq. 4) et l'équation de la vitesse de séchage utilisant le modèle de transfert de Combes (Eq. 11). Nous tenons compte du phénomène de rétrécissement du produit tout au long du processus de séchage, ainsi que de la variation de ses propriétés physiques et thermiques en fonction de sa teneur en eau et de sa température. Couplé aux résultats expérimentaux de cinétiques de séchage, ce modèle nous permet de déterminer le coefficient moyen de transfert d'humidité interne de rondelles de pomme de terre.

En effet, les courbes expérimentales de cinétique de séchage, donnent, pour une couche de produit : La température et l'humidité de l'air asséchant avant d'atteindre le lit et après sa traversée, la vitesse de l'air asséchant avant la traversée du lit et la masse du produit le long du séchage.

La masse du produit frais est connue, ainsi que la surface d'échange entre les particules du produit et l'air tout au long du processus. Les conditions d'entrée de l'air sont connues et sont constantes.

Les courbes expérimentales donnent directement :  $dM/dt$ ,  $T_{fs}$  et  $m_{prs}$

Le modèle, quant à lui calcule :  $h_{me}$ ,  $P_{sat}(T_{pr})$ ,  $P_v(T_{fs})$ ,  $h_{vfpr}$ ,  $L_v$  et  $S_{fpr}$

On peut donc en déduire  $h_{mi}$ .

## **V-5. CARACTERISTIQUES HYGROMETRIQUES DE L'AIR ASSECHANT**

Le degré hygrométrique de l'air, qui peut être représenté sur le diagramme psychrométrique [16], a besoin d'être calculé, tout le long du

parcours de ce fluide, au cours du processus de séchage solaire. Nous utiliserons les formules des teneurs en humidité suivantes [1 et 17] :

- Humidité relative  $\phi_f$  en % : 
$$j_f = 100 \frac{P_v}{P_{sat}} \quad (21)$$

- La pression de vapeur d'eau saturante dans l'air est donnée par la relation de Brooker (1967) en fonction de la température sèche du fluide :

$$P_{sat} = \exp \left[ 52,576 - \frac{6790,5}{T_{fs} + 273} - 5,0281 \ln (T_{fs} + 273) \right] \quad (22)$$

- La pression partielle de la vapeur d'eau dans l'air peut être déterminée expérimentalement à partir des températures à bulbe sèche ( $T_{fs}$ ) et à bulbe humide ( $T_h$ ) de l'air (Eq. 23). Mais, elle peut être déterminée également en fonction de l'humidité absolue de l'air (Eq. 24) :

$$P_v = P_{sat}(T_h) - 0,063(T_{fs} - T_h) \quad (23)$$

$$W = 0,622 \frac{P_v}{P_t - P_v} \quad (24)$$

---

**Références**

1. **Youcef-Ali S.**, *Étude numérique et expérimentale des séchoirs solaires indirects à convection forcée : Application à la pomme de terre*, thèse Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis France (2001).
2. **ANDREIEFF DE NOTBECK G.**, Manuel du conditionnement d'air, Tome II, Pyc-Edition-Desforges, 1978,
3. **BOWSER T. J.** et **WILHELM L. R.**, Modeling Simultaneous Shrinkage and Heat and Mass Transfer of a thin, Nonporous Film During Drying, J. Food Science 60, pp. 753-757, 1995,
4. **WANG N.** et **BRENNAN J. G.**, A Mathematical Model of Simultaneous Heat and Moisture Transfer during Drying Potato, J. Food Eng. 24, pp. 47-60, 1995 b,
5. **SUAREZ C.** et **VIOLLAZ P. E.**, Shrinkage Effect on Drying Behavior of Potato Slabs, J. Food. Eng. 13, pp. 103-114, 1991,
6. **RATTI C.**, Shrinkage During Drying of Foodstuffs, J. Food. Eng. 23, pp. 91-105, 1994,
7. **DIAMANTE L. M.** et **MUNRO P. A.**, Mathematical modeling of the thin layer Solar Drying of sweet Potato slices, Solar Energy 51, pp. 271-276, 1991,
8. **WANG N.** et **BRENNAN J. G.**, The Influence of Moisture Content and Temperature on the Specific Heat of Potato Measured by Differential Scanning Calorimetry, J. Food Eng. 19, pp. 303-310, 1993,
9. **DAGUENET M.**, Les Séchoirs Solaires : théorie et pratique, Unesco, 1985,
10. **SACADURA J. F.**, Initiation aux transferts thermiques, Cast, INSA de Lyon, Technique et Documentation de Paris, 1980,

- 
- 11. McADAMS W. H.**, Transmission de la chaleur, 2<sup>ème</sup> éd, Dunod, Paris, **1961**,
  - 12. CHARREAU A. et CAVAILLE R.**, Séchage (théorie et calculs), technique de l'ingénieur, J2480, pp. 1-23,
  - 13. COMBES C.**, Modélisation informatique d'un système de séchage solaire pour fruits et légumes, thèse doctorat, Université de Paris VII, **1981**,
  - 14. SEMBIRING M.**, Contribution à l'étude des performances technico-économiques d'un séchoir pour fruits et légumes à chau fage partiellement solaire, thèse doctorat, Université de Poitiers, **1990**,
  - 15. ZEGHMATI B.**, Modélisation informatique d'un séchoir à effet de serre pour fruits et légumes, thèse doctorat, Université de Perpignan, **1981**.
  - 16 JANNOT Y. et COULIBALY Y.**, The « Evaporative Capacity » as a Performance Index for a Solar-Drier Air Heater, Solar Energy 63, pp. 387-391, **1998**,
  - 17 ISELT P. et ARNDT U.**, Manuel de l'humidification de l'air. Avec de nombreux exemples d'applications, Pyc-Edition-Livres, **1997**,

# **Annexes**

Annexe 1

1/ L'Algorithme de TDMA :

Soit à résoudre le système tridiagonal suivant:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & & & a_j - 1 \\ & & & a_j & b_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

L'algorithme consiste à transformer le système (1) en système triangulaire supérieur de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & & & \\ & 1 & \alpha_2 & & \\ & & 1 & \alpha_3 & \\ & & & & \alpha_j - 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2}$$

Il faut pour cela déterminer les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$

Le système (2) permet d'écrire :

$$u_j = \beta_j \tag{2-1}$$

$$u_{j-1} = \beta_{j-1} - \alpha_{j-1} u_j \tag{2-2}$$

-----

$$u_{k-1} = \beta_{k-1} - \alpha_{k-1} u_k \tag{2-3}$$

$$u_k = \beta_k - \alpha_k u_{k+1} \tag{2-4}$$

-----

$$u_1 = \beta_1 - \alpha_1 u_2$$

Ecrivons la ligne k du système (1) :

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = v_k$$

et remplaçons-y  $u_{k-1}$  par son expression (2-3):

$$a_k (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1} u_k) + b_k u_k + c_k u_{k+1} = v_k$$

ce qui donne:

$$(b_k - \alpha_{k-1} a_k) u_k + c_k u_{k+1} = v_k - a_k \beta_{k-1}$$

soit:

$$u_k = \frac{v_k - a_k \beta_{k-1}}{(b_k - \alpha_{k-1} a_k)} - \frac{c_k}{(b_k - \alpha_{k-1} a_k)} u_{k+1}$$

Une comparaison avec l'équation (2-4) conduit finalement à :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_k &= \frac{v_k - a_k \beta_{k-1}}{(b_k - \alpha_{k-1} a_k)} \\ \alpha_k &= \frac{c_k}{(b_k - \alpha_{k-1} a_k)} \end{aligned}} \quad (3)$$

Les suites (3) permettent donc de déterminer les coefficients inconnus d'indice k à partir des coefficients d'indice k-1.

Il nous reste à initialiser ces suites et donc à déterminer  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ .

Pour cela, on utilise les deux premières lignes des systèmes (1) et (2):

$$\boxed{\begin{aligned} b_1 u_1 + c_1 u_2 &= v_1 \\ u_1 + \alpha_1 u_2 &= \beta_1 \end{aligned}}$$

qui conduisent à:

$$\beta_1 = \frac{v_1}{b_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

Une fois tous les coefficients déterminés, on peut résoudre le problème par remontée.





Annexe 2 :

**2/ La loi d'état linéaire pour un fluide Incompressible – Dilatable :**

La masse volumique (?) du fluide, dont la variation est prise en compte uniquement dans le terme de poussée « d'Archimède » est exprimée en fonction de la température, la concentration et la pression, mais l'influence de cette dernière est négligeable..

Donc :  $r \cong f(T, C)$ .

On développe cette fonction en série de « Taylor » :

$$r = r_0 + \frac{1}{1!} \left[ (T - T_0) \frac{\partial}{\partial T} + (C - C_0) \frac{\partial}{\partial C} \right] r_0 + \frac{1}{2!} \left[ (T - T_0) \frac{\partial}{\partial T} + (C - C_0) \frac{\partial}{\partial C} \right]^2 r_0 + \dots$$

$$\Rightarrow r = r_0 + \left( \frac{\partial r}{\partial T} \right)_{P,C} (T - T_0) + \left( \frac{\partial r}{\partial C} \right)_{P,T} (C - C_0) + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial T^2} \right)_{P,C} (T - T_0)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 r}{\partial C \partial T} \right)_{P,T} (T - T_0) \cdot (C - C_0) + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial C^2} \right)_{P,T} (C - C_0)^2 + \dots$$

Pour la première approximation :  $r = r_0 + \left( \frac{\partial r}{\partial T} \right)_{P,C} (T - T_0) + \left( \frac{\partial r}{\partial C} \right)_{P,T} (C - C_0)$

Alors que :  $b_T = -\frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial r}{\partial T} \right)_{P,C}$  et  $b_C = -\frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial r}{\partial C} \right)_{P,T}$

On obtient l'approximation de « Boussinesq » :

$$r = r_0 \left[ 1 - b_T \cdot (T - T_0) + b_C \cdot (C - C_0) \right]$$

où :  $r_0$  est la masse volumique relative aux grandeurs  $T_0$  et  $C_0$

(respectivement Température et concentration) de référence données par :

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{et} \quad C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

---



---

 Annexe 3:

## 3/ Série de Taylor :

1. Développement d'une fonction en série entière :

Si la fonction  $f(x)$  admet, dans le voisinage  $|x-a| < R$  du point  $a$ , un développement en série entière suivant les puissances de  $x-a$ , cette série est de la forme :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

(1)

Pour  $a=0$  la série de « Taylor » s'appelle aussi série de « Maclaurin ». L'égalité (1) est vraie pour  $|x-a| < R$  et le reste de la série de « Taylor » est :

$$R_n(x) = f(x) - \left[ f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Pour évaluer le reste on peut utiliser la formule :

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+q(x-a)], \text{ où } 0 < q < 1 \quad (2)$$

(cette dernière formule est la formule du reste de Lagrange).

2. Série de Taylor pour les fonctions de deux variables :

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!} \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(a,b) + \frac{1}{2!} \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(a,b) + \dots + \frac{1}{n!} \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a,b) + \dots \quad (1-3)$$

Si  $a=b=0$ , la série de « Taylor » s'appelle aussi série de « Maclaurin ».

On utilise ici les notations suivantes :

$$\left[ (x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right] f(a,b) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=a}^{y=b} (x-a) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big|_{x=a}^{y=b} (y-b)$$

$$\left[ (x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \Big|_{x=a}^{y=b} (x-a)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a}^{y=b} (x-a) \cdot (y-b) + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \Big|_{x=a}^{y=b} (y-b)^2, \text{ etc.}$$

Le développement (1-3) a lieu si le reste de la série :

$$R_n(x,y) = f(x,y) - \left( f(a,b) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[ (x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a,b) \right) \rightarrow 0 ; \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

---

---

**ANNEXE 4****PROPRIETES THERMOPHYSIQUES DE L'AIR**

Dans une plage moyenne de température (notre domaine d'application), les propriétés physiques de l'air varient linéairement avec sa température. D'après [65 et 66], elles s'écrivent comme suit ( $T_f$  en °C) :

- La conductivité thermique

$$l_f = 0,02624 + 0,0000758(T_f - 27)$$

- La viscosité cinématique

$$m_f = (1,983 + 0,00184(T_f - 27))10^{-5}$$

- La capacité calorifique

$$Cp_f = 1005,7 + 0,066(T_f - 27)$$

- La masse volumique

$$r_f = 1,1774 - 0,00359(T_f - 27)$$

- La viscosité dynamique

$$n_f = \frac{m_f}{r_f}$$

---



---

**ANNEXE 5**
**ELEMENTS THEORIQUES ET DONNEES PRATIQUES SUR LE SECHAGE**

Nous rappelons quelques notions caractérisant le degré hygrométrique des produits et dont la connaissance est indispensable pour traiter un problème de séchage :

- Humidité absolue ou teneur en eau à base sèche d'un produit  $M$  ; c'est le rapport de la masse d'eau  $m_{\text{eau}}$  contenue dans le produit à la masse du produit sec  $m_{\text{sec}}$  :

$$M = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{sec}}} \quad (\text{kg d'eau / kg de matière sèche})$$

Les teneurs en humidité absolue initiale ( $M_0$ ) et à l'équilibre ( $M_e$ ) ; sont définies respectivement par le rapport de la masse d'eau, respectivement initiale et finale, contenue dans le produit à la masse du produit sec.

- Humidité relative ou teneur en eau à base humide d'un produit  $M_r$  ; c'est le rapport de la masse d'eau  $m_{\text{eau}}$  contenue dans le produit à la masse du produit humide  $m_{\text{humide}}$  :

$$M_r = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{humide}}} = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{eau}} + m_{\text{sec}}} \quad (\text{kg d'eau / kg matière humide})$$

On a :  $M_r = \frac{M}{1 + M}$

Avec : l'humidité relative initiale :  $M_{r0} = \frac{M_0}{1 + M_0}$

Et l'humidité relative finale :  $M_{re} = \frac{M_e}{1 + M_e}$

- Rapport de séchage  $R_s$  :

$$R_s = \frac{\text{masse initiale du produit à sécher}}{\text{masse finale du produit séché}}$$

- Température limite de détérioration du produit :  $T_m$

Nous résumons dans le tableau suivant, des données pratiques concernant quelques produits couramment séchés :

<b>FRUITS</b>	<b><math>T_m</math> (°C)</b>	<b><math>M_{r0}</math> (%)</b>	<b><math>M_{re}</math> (%)</b>	<b><math>R_s</math></b>
Abricots – pêches	65	85	15 - 18	5/1
Bananes	70	72	12 - 15	-
Figues	70	70 - 75	20 - 24	-
Goyaves	65	80	7	-
Raisins	70 - 80	80	15 - 20	-
<b>LEGUMES</b>	<b><math>T_m</math> (°C)</b>	<b><math>M_{r0}</math> (%)</b>	<b><math>M_{re}</math> (%)</b>	<b><math>R_s</math></b>
Carottes	75	70	5	12/1
Choux	55 - 60	80	5	18/1
Gombos ou Okros	66	87	11	10/1 – 12/1
Haricots verts	75	70	5	7/1 – 10/1
Epinards - Légumes à feuilles	60	80	10	14/1
Manioc	80	50 - 65	12 - 15	-
Oignons - Ail	55	80	4	9/1
Patates douces - Igname	70 - 75	75	7	4/1
Pommes de terre	70	75	13	7/1
Pois verts	65	80	5	-
Poivrons	65 - 70	85	5	11/1 – 14/1
Tomates	50	95	7	16/1
<b>GRAINS</b>	<b><math>T_m</math> (°C)</b>	<b><math>M_{r0}</math> (%)</b>	<b><math>M_{re}</math> (%)</b>	<b><math>R_s</math></b>
Blé	45	20	16	-
Maïs	60 - 80	35	15 - 20	-
Mil - Sorgho	60	21	14	-
Riz paddy	50	22 - 35	11 - 13	-
<b>ARACHIDES</b>	35	35 - 45	7 - 9	-
<b>CACAO</b>	55	50	7 - 8	-
<b>CAFE</b>	95	50 - 52	11 - 13	-
<b>COPRAH</b>	70 - 80	50	5 - 7	-
<b>POISSONS</b>	50	75	25 - 30	-
VIANDE	50 - 60	75	30	-

---



---

## Sommaire

I-	INTRODUCTION.....	1
II-	ANALYSE THEORIQUE .....	2
II-1	Introduction :.....	5
II-2.	Ecriture des équations de base à partir des méthodes de bilans : .....	6
	Les conventions de signes (II-4) n'étant indispensables que pour les scalaires, elles n'ont plus de nécessité ici, le bilan intégral s'écrit :.....	9
II-2-1.	Bilan de masse totale :.....	10
II-2-2.	Bilan de la quantité de mouvement :.....	10
II-2-3.	Bilan d'énergie :.....	12
II-2-4.	Notions fondamentales sur la convection thermique : .....	16
II-2-5.	Bilan de concentration chimique : .....	20
	Références :.....	23
III-I.	Introduction.....	26
III-2.	Mécanisme.....	27
III-3.	Applications : .....	27
III-4.	En météorologie .....	28
III-4-1.	Nuages convectifs.....	28
III-4-2.	Océanographie .....	29
III-4-3.	Tourbillon de poussière.....	30
III-4-3.	Le Gulf stream .....	31
III-4-4.	Le Soleil :.....	33
III-5.	En industrie.....	34
III-5-1.	Les cheminés .....	34
III-5-2.	Réacteurs :.....	35
III-5-3.	Centrales nucléaire .....	37
III-5-4.	Le séchage.....	38
	Références .....	39
V-1.	DISCRETISATION DES EDP .....	41
IV-1-1.	Les différences finies. ....	41
IV-1-2.	Les volumes finis. ....	41
IV-1-3.	Les éléments finis.....	42
IV-2.	Méthodes des Différences Finies .....	42
IV-3.	Méthode des volumes finis .....	44
IV-3-1.	Discrétisation de l'équation générale :.....	46
IV-3-2.	Maillage décalé pour évaluer les vitesses :.....	50
IV-4.	Equation de correction de la vitesse : .....	51

---

IV-5. Equation de correction de la pression :.....	52
Schéma numérique .....	54
IV-6. Résolution du système d'équations linéaires : .....	55
Références :.....	56
V-1. Introduction : .....	58
V-2. Description d'un modèle spécifique : .....	59
V-3. Hypothèses simplificatrices :.....	60
V-4. Simplification des équations :.....	61
V-5. Conditions aux limites : .....	63
V-6. Formes adimensionnelles des équations :.....	64
V-6-1. L'équation du mouvement suivant $\frac{\partial}{\partial x}$ :.....	64
V-6-2. L'équation du mouvement suivant $\frac{\partial}{\partial y}$ :.....	65
V-6-3. L'équation de chaleur :.....	65
III-6-4. L'équation de concentration chimique : .....	66
V-7. Conditions aux limites (après l'adimensionnalisation) :.....	67
V-8. Coefficients d'échanges thermique et massique et nombres de <i>Nusselt</i> et de <i>Sherwood</i> :.....	68
<i>Conclusion</i> .....	70
Références .....	71
VI-1. INTRODUCTION .....	73
VI-2. MODELISATION .....	74
VI-2-1. DESCRIPTION .....	74
VI-2-2. MISE EN EQUATION .....	76
V-3. VITESSE DE SECHAGE.....	89
V-4. COEFFICIENTS D'ÉCHANGE THERMIQUE ET MASSIQUE.....	90
V-4-1. TRANSFERT THERMIQUE .....	90
V-4-2. TRANSFERT MASSIQUE .....	93
V-5. CARACTERISTIQUES HYGROMETRIQUES DE L' AIR ASSECHANT .	95
Références .....	97
Annexe 1.....	100
Annexe 2 : .....	103
Annexe 3:.....	104
ANNEXE 4 .....	106
ANNEXE 5 .....	107