الحل النموذجي للواجب رقم 01 في الإحصاء 2

ليكن تابع التوزيع **F(X)** معرف كما يأتي، حيث **b** عدد حقيقي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X < 0 \\ \frac{1}{3}bx^3 \ldots\ldots\ldots..0 \leq X \leq 1 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X \geq 1 \end{cases}$$

1. انطلاقا من **F(X)** ، أوجد دالة الكثافة الاحتمالية ***f(x)*** للمتغير العشوائي **X**.

الجواب **01**: إن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية ***f(x)*** معناه اشتقاق تابع التوزيع **F(X)** ، لأننا نعلم من المحاضرات أن مشتق تابع التوزيع يعطي دالة الكثافة، وتكامل دالة الكثافة يعطي تابع التوزيع. اذن:

$$f(x) = F'(X) = \left(\frac{1}{3}bx^3\right)' = \frac{1}{3}3bx^2 = bx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\mathbf{0.5})$$

ومنه:

$$f(X) = \begin{cases} bx^2 \ldots\ldots\ldots.0 \leq X \leq 1 \\ \ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ sinon \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots..(\mathbf{0.5})$$

وهذه هي دالة الكثافة الاحتمالية.***f(x)***

2. حدد قيمة الثابت **b** لتكون ***f*** دالة كثافة احتمالية للمتغير **X** .

الجواب **02**: لتكون ***f*** دالة كثافة احتمالية للمتغير ***X*** يجب توافر الشرطين المعروفين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases} \ldots\ldots\ldots \text{ن}\mathbf{1}$$

أي... يجب أن تكون الدالة موجبة في كل مجال تعريفها، ويجب ان يكون تكاملها على هذا المجال مساويا للواحد.

نبدأ بالشرط الثاني، نجد قيمة ***b*** ثم نتأكد من تحقق الشرط الأول:

$$(2) \Leftrightarrow \int_0^1 bx^2dx = 1 \Leftrightarrow b\int_1^3 x^2dx = 1 \Leftrightarrow b\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{3} \ldots\ldots\ldots..(\mathbf{1})$$

نتحقق الآن من الشرط الأول: نلاحظ ان ***f*** موجبة مهما كان ***X*** منتميا إلى مجال التعريف.

$$(1) \Leftrightarrow 3x^2 \geq 0 \ \ \forall\ X \in R$$

ومنه تصبح دالة الكثافة كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} 3x^2 \dots\dots\dots .0 \leq X \leq 1 \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots \; sinon \end{cases}$$

3. أحسب احتمال أن يكون X أكبر من 0.6.

الجواب 03: لحساب هذا الاحتمال نجري تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من القيمة 0.6 إلى الحد الأعلى للمجال وهو 1، أو بطريقة أخرى، نحسب تابع التوزيع عند القيمة 0.6 (أي *F(0.6)*) فيعطينا المساحة (او الاحتمال) من 0 الى 0.6 ، وبما أن المطلوب هو الجزء الآخر من المساحة (أي من 0.6 الى 1)، وبما أن المساحة الاجمالية تساوي 1 فإن:

$$P(X > 0.6) = 1 - F(0.6) = 1 - (0.6)^3 = 1 - 0.216 = \mathbf{0.784} \; \dots\dots\dots .. \mathbf{(1)}$$