**الميكانيكا التحليلية**

معادلات لاكرانج

في دراستنا السابقة للديناميكا كانت المسألة الديناميكية المطروحة ذات صيغات خاصة تعتمد على الإحداثيات المستخدمة سواء كانت الإحداثيات الكارتيزية أو القطبية أو الذاتية . وكانت تصاغ بمعلومية قوانين نيوتن المباشرة علي الحركة . ثم تطور هذا الإجراء، بوسطة العالم الرياضي الفرنسي جوزيف لويس لاكرانج ، باللجوء للعلاقات الهندسية التي تحكم أوضاع المجموعات الديناميكية موضع الدراسة.

وبذلك فإنه في دراستنا التالية سنأخذها في الحالات العامة أي بشي من التعميم وذلك بأن نعتبر مجموعة ديناميكية ذات صيغة عامة ويتحدد وضعها في الفراغ تحديد كامل بمجموعة من المعلومات الهندسية كأن تكون إحداثيات لنقط خاصة متميزة بها أو أبعاد عن محاور تدور حول مركز هذه المجموعة أو زوايا ميل لخطوط خاصة متميزة لهذه المجموعة.

وبالنسبة لأي مجموعة ديناميكية عامة يوجد عادة حد ادني لهذه المعلومات الهندسية التي تحدد وضع المجموعة في الفراغ مثل هذه المعلومات تسمى عادة الإحداثيات المعممة لهذه المجموعة.

درجات الحرية

عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد موضع مجموعة مكونة من جسيم أو أكثر يسمى عدد درجات الحرية للمجموعة.

مثال:

يتحرك جسيم بحرية في الفراغ ويلزم 3 إحداثيات مثل (x,y,z) لتحديد موضعه بذلك يكون عدد درجات الحرية 3 .

مثال:

مجموعة تتكون من n من الجسيمات تتحرك بحرية في الفراغ يلزمنا 3n إحداثيات لتحديد موضعها وبذلك يكون عدد درجات الحرية هو 3n .

مثال:

حدد عدد درجات الحرية في كل من الحالات الآتية جسيم يتحرك على منحنى فراغ معين – خمسة جسيمات تتحرك بحرية في مستوى – خمسة جسيمات تتحرك بحرية في الفراغ – جسيمان متصلان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوى.

الحل:

يمكن وصف المنحنى بالمعادلات البارامترية x=x(s) , y=y(s) , z=z(s) حيث s هو البارامتر. عندئذ يحدد موضع الجسيم على المنحنى بواسطة إحداثي واحد معين وبذلك توجد درجة حرية واحدة.

* كل جسيم يتطلب إحداثيان لتحديد موضعه في المستوى وبذلك يلزم 5 x 2 = 10 إحداثي لتحديد مواضع الجسيمات الخمسة أي أن المجموعة لها 10 درجات حرية.
* بما أن كل جسيم يلزمه ثلاث إحداثيات لتحديد موضعه فإن المجموعة يكون لها 5 x 3 = 15 درجة طلاقة.
* يمكن التعبير عن إحداثيات جسمين بواسطة (x1,y1) , (x2,y2) أي أربعة إحداثيات وحيث أن المسافة بين هاتين النقطتين ثابتة

( طول القضيب (x1-x2)2 + (y1-y2)2 = a2 )

وينتج انه يمكن التعبير عن درجة حرية بدلالة الأخرى وبناء على ذلك يوجد 4-1 = 3 درجات طلاقة

مثال:

اوجد عدد درجات الحرية لجسم جاسئ

1. يمكنه أن يتحرك بحرية في فراغ ثلاثي الأبعاد
2. لديه نقطة مثبته ولكن يمكن أن يدور حولها في الفراغ

الحل:

1- إذا كانت هناك ثلاث نقط في الجسم الجاسئ مثبته في الفراغ ولا تقع على استقامة واحدة وفى مستوى واحد فإن الجسم يكون أيضاً مثبت في الفراغ اعتبر هذه النقط هي على التوالي ( x1,y1,z1) , (x2,y2,z2) , (x3,y3,z3)

أي عددها يكون تسعة وحيث أن الجسم جاسئ فإنه يكون

(x1-x2)2 + (y1-y2)2 + (z1-z2)2 = cont.

(x1-x3)2 + (y1-y3)2 + (z1-z3)2 = cont.

(x2-x3)2 + (y2-y3)2 + (z2-z3)2 = cont.

أي انه يمكن التعبير عن ثلاثة إحداثيات بدلالة الستة الباقية.

وبذلك يلزم 9-3=6 إحداثيات مستقلة لكي توصف الحركة أي انه توجد ست درجات طلاقة.

1. يمكن وصف الحركة تماماً إذا علمنا إحداثيات نقطتين مثلاً ( x1,y1,z1) , (x2,y2,z2) حيث تؤخذ النقطة الثابتة عند نقطة الأصل لمجموعة الإحداثيات وحيث أن الجسم متماسك يجب أن يكون

حيث C ثابت

ومنها يمكن إيجاد ثلاثة إحداثيات بدلالة الثلاثة الباقية ، وبذلك يكون هناك ثلاثة درجات طلاقة.

الإحداثيات المعممة:

نفرض أن نظام يتكون من n جزء محكم الحركة (مقيد) مثل جزء يتحرك على سلك دائري أو جسم متماسك يتحرك في مستوى.

فإنه يوجد عدد من الإحداثيات المستقلة اللازمة لوصف الحركة هي, (حيث n عدد الجسيمات) تسمى هذه الإحداثيات بالإحداثيات المعممة للمجموعة.

و سنرمز للأحدثيات المعممة بالحرف . وبما انه تكون للنقطة الحرة 3 درجات حرية فان المجوعة المكونة من n نقط مادية و التي فرضت عليها K قيود هندسية يكون لها درجة حرية، و يتحدد موضعها بعدد من الإحداثيات المعممة.

إذا تبين أن موضع المجموعة المعطاة يتحدد تحديدا وحيد القيمة بعدد من البارامترات المستقلة فيما بينها ،فيكون لهذه المجموعة من درجة الحرية .

قد تكون هذه الإحداثيات عبارة عن مسافات أو زوايا أو الاثنين معاً وهكذا. عدد الإحداثيات المعممة هو عدد درجات الحرية.

وبما أن الإحداثيات المعممة مستقلة فيما بينها،)يمكن تغير أى إحداثي منها و تظل باقي الإحداثيات ثابتة دون تغير (، فان التغيرات الأولية لهذه الإحداثيات

تكون أيضا مستقلة فيما بينها. وعند ذلك فان كل مقدار من المقادير يحدد الإزاحة الافتراضية المناظرة المستقلة عن الإزاحات الأخرى للمجموعة.

وكما يحدث عند الانتقال من مجموعة إحداثيات معينة إلى مجموعة أخرى يمكن التعبير عن الإحداثيات الكرتيزية لأية نقطة من ا لمجموعة المعطاة ، بدلالة الإحداثيات المعممة بارتباطات على الصورة التالية

بالتالي فنحصل على لمتجه موضع هذه النقطة الذي يتحدد بمساقطه أي بالإحداثيات

على :

معادلات التحويل:

نفرض أن متجه موضع الجسيم رقم (2) بالنسبة إلى الإحداثيات x, y, z هو

فان العلاقات بين الإحداثيات و إحداثيات الموضع تعطى من:

وفى الصورة الاتجاهية

حيثt هو الزمن وذلك بفرض أن الدوال في) 6 (، ( 7) دوال متصلة ولها مشتقات متصلة.

* مثال.

- اكتب معادلات التحويل لبندول مزدوج يتحرك في مستوى شكل-1-.

الحل:

الإحداثيات  تحددان تماماً موضع الجسمين m1,m2 وبذلك يعتبران هما الإحداثيات المعممة ، أي عدد درجات الطلاقة 2 .نفرض أن (x2,y2) ، (x1,y1) هما إحداثيات الجسيمين m1,m2 .

و هذه هي معادلات التحويل .

شكل-1-

**الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات :**

انفر ض إن الإحداثيات المعممة من القيم لابتدائية إلي القيم المجاورة

فالتغيرات التي تقابلها في الإحداثيات الكرتيزية هي كمايلي :

*و هكذا المشتقات الجزئية تعبر عن دوال للإحداثيات المعمم .*

مثال*:*

*اوجد الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات المعممة لحركة نقطة مادية في مستوى .*

*نختار الاحداثى المعمم :*

M

o

x

y

*وعندئذ:*

*و على ذلك نجد أن:*

*العلاقات السابقة واضح أنها تعطى التغيرات في الناتجة عن تغيرات صغيرة في و كتعميم لذلك نفرض أن مجموعة ميكانيكية لها دراجات حرية و إحداثياتها المعممة كالتالي عندئذ فهي تتغير من الإحداثيات المجاورة: فتتحرك المجموعة من النقطة إلى النقطة المجاورة التي إحداثياتها حيث:*

*و بصورة عامة تكون على الشكل التالي*

*حيث أن:*

* *يمثل المحاور الكرتيزية*
* *يمثل الاحداثي المعمم*

المجموعة الديناميكية(المنظومة الميكانيكية) :

هي مجموعة من الجسيمات تتحرك تحت تأثير مجموعة من القوى وهذه الجسيمات قد تكون منفصلة عن بعضها البعض أو متصلة. الجسم هو مجموعة من الجسيمات المتصلة تشغل حيزاً من الفراغ إذا كانت المسافات بين الجسيمات تتغير يسمى جسماً مرناً.

أما إذا كانت المسافات بين الجسيمات ثابتة يسمى الجسم جاسئاً أو متماسكاً.

الجسم الجاسئ (أو المتماسك) قد يكون على شكل خط مستقيم مثل قضيب مستقيم أو على شكل منحنى مثل سلك على شكل دائرة أو قطع ناقص أو غير ذلك ويكون له كثافة طولية (كتلة وحدة الأطوال) وهى تعتمد على الموضع إذا كان الجسم غير منتظم الكثافة أما إذا كان الجسم منتظماً فإن كثافته الطولية تكون ثابتة ، فمثلاً سلك منتظم على شكل دائرة نصف قطرها وكثافته فان كتلته تساوى . إذا كان الجسم سطحاً مستويا ً مثل صفيحة على شكل مثلث أو دائرة أو كان سطحاً منحنياً مثل سطح اسطوانة مجوفة أو كرة مجوفة فيكون له كثافة سطحية منتظمة أو غير منتظمة. إذا كان السطح منتظماً فإن كثافته السطحية تكون ثابتة فمثلاً صفيحة على شكل مستطيل بعداه a,b أو سطح كره نصف قطرها فإن كتلة الصفيحة المستطيلة هي وكتلة الصفيحة الكروية هي حيث هي الكثافة اختصاراً للكثافة السطحية . الحالة العامة أن يكون الجسم ثلاثي الأبعاد أي له كثافة حجمية قد تكون منتظمة أو غير منتظمة إذا كان الجسم منتظماً فإن كثافته الحجمية تكون ثابتة فمثلاً جسم على شكل مكعب طول حرفه a أو كره مصمتة نصف قطرها b فإن كتلة المكعب هي وكتلة الكرة المصمتة هي حيث هي الكثافة اختصاراً للكثافة الحجمية .

* عرف المجموعة الديناميكية

أنواع القيود:

المجموعة الديناميكية أثناء حركتها إما أن تكون حرة ليس عليها قيود أو أن عليها عدد من القيود وفى هذه الحالة تكون هناك مجموعة من الشروط على مواضع وسرعات جسيمات المجموعة (النقط المادية). إذا كانت المجموعة الديناميكية تتكون من جسيم وكانت إحداثيات معممة التي تصف الحركة عند الزمن لـ عدد الإحداثيات المعممة فإذا كانت جميع قيود الحركة للمجموعة يمكن التعبير عنها بالمعادلات

أي أن مواضع وسرعات الجسيمات تأخذ قيماً معينة تتفق وتحقق هذه العلاقة الأخيرة يمكن تقسيم المجموعات ( الأنظمة) الديناميكية المقيدة إلى الأنواع الآتية:-

1. القيد المستقر زمنياً : إذا لم يظهر الزمن صراحة في معادلة القيد وتسمى المجموعة الديناميكية في هذه الحالة بالمجموعة الاسكليرونوميه Scléronomes
2. القيد الغير مستقر زمنياً: إذا كان الزمن t يظهر صراحة في معادلة القيد وتسمى المجموعة الديناميكية بالمجموعة الريهونومية Rehénomes .
3. القيد الهندسي : إذا لم تظهر السرعات صراحة في معادلة القيد وتسمى المجموعة بالمجموعة الهولونوميه Holonomes.
4. القيد الكينماتيكى : إذا ظهرت السرعات صراحة في معادلة القيد وهذه الحالة تنقسم إلى نوعين:
   1. إذا أمكن تكامل معادلة القيد و تحويلة بالتالي إلى قيد هندسي ولذلك تكون المجموعة الديناميكية هولونوميه
   2. إذا لم يمكن تكامل معادلة القيد فإن المجموعة الديناميكية تسمى مجموعة غير هولونومية Non – holonome
5. المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة :

إذا كانت جميع القوى المؤثرة على مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة الجهد ( أو طاقة الجهد ) فعندئذ تسمى المجموعة محافظة وإلا فإنها تكون غير محافظة.

اى أن:

* ما هي أنواع القيود

مثال:

* جسيم يتحرك على سطح معادلته F(x, y, z) = o بين نوع القيد

الحل:

معادلة القيد هي معادلة السطح F(x,y,z) = o وهو قيد مستقر زمنياً لان الزمن لا يظهر صراحة في معادلة القيد وتكون المجموعة سكليرونومية. حيث أن معادلة القيد لا تظهر فيها السرعات فان القيد هندسي وتكون المجموعة هولونوميه . أي أن المجموعة هولونوميه سكليرونومية والقيد هندسي مستقر زمنياً .

ملاحظة:

يمكن اختيار فئات عديدة من الإحداثيات المعممة لمعالجة مسألة معينة ولكن المهارة في ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة اللازمة ويمكن أن تبسط التحليل إلى درجة عظيمة.

مثال:

ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة اللازمة لتحديد الحركة تحديداً كاملاً لكل مما يأتى :

1. جسيم مقيد الحركة على قطع ناقص
2. اسطوانة دائرية تتدحرج إلى أسفل مستوى مائل
3. كتلتين في بندول مزدوج مقيد الحركة في مستوى

الحل:

1. نأخذ القطع الناقص في مستوى xy للجسيم الذي كتلته m ويتحرك على القطع الناقص إحداثياته هي (x,y) حيث ، في هذه الحالة يمكن تحديد الحركة تحديداً كاملاً باستخدام الإحداثى المعمم . (هولونومية – اسكليرنومية)
2. موضع الاسطوانة يتحدد على المستوى المائل تحديداً كاملاً باعتبار المسافة x التي يقطعها مركز الكتلة والزاوية التي يدورها سطح الاسطوانة حول محورها . إذا لم يكن هناك انزلاق فإن x ترتبط مع بحيث يلزم فقط احداثى معمم إما x أو ، وإذا كان هناك انزلاق فإنه يلزم احداثيان معممة هما . ( هولونومية – اسكليرنومية)
3. في الرسم السابق الإحداثيات ، يحددان تحديداً كاملاً موضعي الكتلتين m1,m2 ويمكن اعتبارهما الإحداثيين المعممين المطلوبين.

السرعات المعممة :

تسمى مشتقات الإحداثيات المعممة بالنسبة إلى الزمن بالسرعات المعممة للمجموعة . وسنرمز للسرعات المعممة بالرموز حيث وهكذا.

وتعتمد مقاييس السرعات ( أبعاد) المعممة على مقاييس الإحداثيات المعممة . فإذا كانت مقدارا حظيا فان تكون سرعة خطية وإذا كانت q زاوية تكون سرعة زاوية وإذا كانت مساحة تكون مساحية وهكذا. وكما نرى يشمل مفهوم السرعات المعممة جميع مفاهيم السرعات التي درسنا ها سابقاً .

طاقة الحركة المعممة :

أعتبر أن هو متجه موضع الجسيم رقم بالنسبة لمجموعة الإحداثيات . علاقات الإحداثيات المعممة بإحداثيات الموضع تعطى بواسطة معادلات التحويل الآتية:

حيث t يمثل الزمن ويمكن كتابة ما سبق في صيغة اتجاهية.

طاقة الحركة الكلية للمجموعة هي:

حيث N عدد الجسيمات للمجموعة

مثال:

اثبت أن

الحل :



بالتفاضل جزئياً بالنسبة إلى 

مثال: اثبت أن

الحل:



من (23)، (24) نحصل على النتيجة المطلوبة والتي يمكن تفسيرها على أنها عملية تبادل لدرجة المؤثرات التفاضلية أي أن:



القوى المعممة

اعتبر هي القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم رقم  في المجموعة المكونة من N من الجسيمات ومتجه الموضع  يكتب في الصورة:

نزيح المجموعة إزاحة افتراضية مستقلة يكسب من خلالها الاحداثى تغيرا مقداره في حين تظل باقي الإحداثيات ثابتة . و عندئذ يكتسب كل من متجهات مواضع نقط المجموعة عنصر التغير (التغير الأول) .

يمثل الرمز التغير الأول أو عنصر التغير لمتجه الموضع نتيجة لتغير الاحداثى فقط إلى

وبما أن لا يتغير أثناء الإزاحة التي ندرسها إلا الاحداثى فتحتفظ الإحداثيات الأخرى بقيم ثابتة فان يحسب و كتفا ضل جزئي .

الشغل المبذول: هو الشغل الممكن أو الافتراضي أي الشغل الأول المبذول الذي تبذله القوة المؤثرة على نقطة مادية في إزاحاتها إزاحة مطابقة للإزاحة الافتراضية لهذه النقطة .

و نرمز للشغل الافتراضي للقوة الفعالة بالرمز

نحسب الآن مجموع عناصر الشغل الذي تبذله كل القوى المؤثرة في الإزاحة الافتراضية، و باستخدام المعادلة السابقة نحصل على:

النقطة ترمز لحاصل ضرب القياسي لمتجهين ، و بأخذ العامل المشترك نحصل في الأخير على النتيجة التالية :

حيث n عدد درجات الطلاقة.

حيث

وتسمى ( القوة المعممة ) المصاحبة للاحداثى المعممة

و بإزاحة المجموعة افتراضية مستقلة أخرى يتغير خلالها الاحداثى فقط نحصل للشغل الأول الذي تبذله كل القوى المؤثرة في هذه الإزاحة على

حيث أن

المقدار عبارة عن القوة المعممة المصاحبة للاحداثى المعممة

من الواضح إذا أزيحت المجموعة إزاحة افتراضية تتغير خلالها كل إحداثياتها المعممة في أن واحد فان الشغل الأولى الذي تبذله القوى المؤثرة في هذه الازاحه يتحدد بالمعادلة.

**شروط اتزان المجموعة في إحداثيات المعممة**: وفقا لمبدأ الشغل الافتراضي يكون الشرط الضروري و الكافي لا تزان مجموعة ميكانيكية هو أن يساوى صفرا مجموع الشغل الأول الذي تبذله كل القوى الفعالة (و قوى الاحتكاك أن كانت تبذل شغلا ) في إزاحة المجموعة أية إزاحة افتراضية .اى الشرط . و يعطى هذا الشرط في الاحداثيا ت المعممة مايلى

و بما أن جميع المقادير مستقلة فيما بينها ، فان المعادلة لا تتحقق الا عندما يساوى كل المعاملات على حده صفرا .

**مبدأ دالمبرت**

نفرض أن مجموعة ميكانيكية تتكون من n نقطة مادية . نأخذ أي نقطة منها. وتؤثر على هذه النقطة قوى الخارجية و الداخلية (التي تضم كلا من القوى الفعالة و ردود أفعال القيود).

حسب القانون الأساسي لديناميكا :

حيث: محصلة القوى الخارجية.

محصلة الداخلية (وردود الفعال).

حسب قانون الثالث لنيوتن ، فان مجموع القوى الداخلية يساوى صفرا

حيث أن:

* محصلة كل القوى الخارجية.
* الكتلة الكلية للمجموعة .
* عجلة مركز المجموعة.

نكتب العلاقة السابقة على الشكل التالي

و تعبر هذه العلاقة(38) عن مبدأ دالمبرت للمجموعة ،إذا أثرنا في أية لحظة زمنية على كل نقطة من نقط المجموعة بقوة دالمبرت للقصور الذاتي المناظرة علاوة على القوى الخارجية و الداخلية المؤثرة فعليا على هذه النقطة على فان مجموع القوى الناتجة تكون في حالة اتزان و يمكن أن نطبق عليها جميع معادلا ت الأستاتيكا.

بضرب المعادلة 38 بمتجهة سلامي وبجمعيها على كامل الجملة نحصل على معادلة دالمبرت

نعوض المتجهة بالإزاحة الافتراضية

مثال:

* اثبت أن

الحل:

حيث أن مستقلة فإن جميع يجب أن تكون أصفارا أي أن:

**المعادلات لاجرانج من الرتبة الأولى:**

إن حركة مجموعة ميكانيكية هولونومية متكونة من نقطة مادية خاضعة لقيود هندسية وحركة ، على التوالي ، يمكن تعيينها بمعادلة دالمبرت ومعادلة القيود

نذكر بأنه من هنا فصاعدا سنرمز إلى القوة الفاعلة بالحرف بدلا من

لتعيين قانون الحركة لجميع النقاط المادية

نحتاج إلى 3N معادلات سلمية لكن العلاقات ـ42 ـ تعطينا معادلة فقط ؛ بصفة عامة أقل من N 3 .

رغم أن العلاقة ـ 42ـ تعين حركة الجسم

نضرب معادلات القيد بالثوابت ، على التوالي ـ المجهولة حاليا ؛ ثم نجمع المعادلات ـ1 ـ نحصل .

بما أن درجة حرية الجملة هي:

ضمن الإحداثيات 3 للإزاحات الافتراضية يمكننا أن نختار عشوائيا .

لنعتبر أنه لدينا في المعادلة ـ 44 ـ ثابتا عشوائيا لدينا الإمكانية أن نختار ـ زيادة عن الإحداثيات بقية الاحداثيات كذلك ؛ لأن الثوابت، يمكن دائما تحديدها بحيث تحقق المعادلة ـ 44 ـ

بتطبيق مضروبات لاجرانج ، كل إحداثيات الإزاحات الافتراضية

يمكن أن تحدد عشوائيا على سبيل المثال

إذا المعادلة 44 تعطي بالتالي معادلة شعاعيه توافق معادلة سلمية.

عدد المجاهيل يرتفع بمضروبات، إذ نحتاج إلى عدد معادلة اضافية هذه المعادلات الناقصة ماهي في الحقيقة إلا معادلات القيود.

جملة المعادلات التفاضلية المشكلة من المعادلات 47 ،48 تشكل معادلة لاجراج من الدرجة الأولى المستعملة لتعيين حركة جملة ميكانيكية هولونومية أو غير هولونومية .

كما أن حل المعادلات 47، 48 يعين قانون الحركة كل نقطة مادية

وكذلك مضروبات ،

بمعرفتنا لهذه المضروبات، حسب العلاقات 7، 6 لدينا قوى القيود.

التي تعطي في آن واحد معنى الفيزياء للمضروبات.

مثال :

اعتبر  هي القوة الخارجية المحصلة المؤثرة على جسيم  فى المجموعة . اثبت :





الحل:

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسيم  يكون لدينا



فعندئذ يكون



وكذلك



أي أن



حيث أن  ثابتة ينتج من (52) أن



بإجراء المجموع على الطرفين بالنسبة إلى  على جميع الجسيمات يكون لدينا



مثال:

باعتبار T هي طاقة حركة مجموعة من الجسيمات.اثبت أن:





الحل:



وذلك باستخدام طريقة حذف النقط.

مثال:

اثبت أن:





الحل:



وكذلك:



هذه المعادلات تسمى **بمعادلات لاجرانج من الدرجة الثانية**.

الكمية  تسمى بكمية الحركة المعممة أو كمية الحركة الاقترانية المصاحب للاحداثى المعمم  .

* عرف كمية الحركة المعممة .

مثال:

افترض أن القوى التي تؤثر على مجموعة من الجسيمات يمكن اشتقاقها من دالة جهد V أي أن المجموعة محافظة. إذا كان L = T-V هي دالة لاجرانج أو تسمى لاجرانجيان المجموعة فاثبت أن :



الحل:

بما أن القوى يمكن اشتقاقها من دالة جهد فإن:



وحيث أن الجهد أو الطاقة للجهد يكون دالة في q فقط ( محتمل في الزمن t ) فإن:



وعندئذ يصبح لدينا :



ملحوظة في هذه الحالة يكون:



مثال: اكتب دالة لاجرانج لبندول بسيط ثم احصل على المعادلة التي تصف حركته.

الحل:

الزاوية التي يصنعها الخيط oB مع الرأسي هي  وهذه تكون الإحداثى المعمم. إذا كان طول الخيط هو فإن طاقة الحركة عندئذ تكون



حيث m هي كتلة البندول.

يأخذ المستوى الأفقي المار بأسفل نقطة A ليكون مستوى القياس فإن طاقة الجهد هي:



وبذلك تكون دالة لاجرانج هي:



معادلة لاجرانج هي:



وهذه هي معادلة الحركة المطلوبة.

إذا كان النظام محافظ أي أن القوى مشتقة من دالة جهد V فإن المعادلة يمكن كتابتها على الصورة:



فإذا كانت بعض القوى محافظة ومشتقة من دالة جهد V والبعض الآخر غير محافظ مثل قوى الاحتكاك تصبح المعادلة في الصورة



حيث  هي القوى المعممة الغير محافظة.

تعريف:

يعرف المقدار  بكمية الحركة المعممة المناظرة للاحداثى المعمم  .

* عرف كمية الحركة المعممة.

وتسمى  بكمية الحركة المرافقة لـ  وإذا كان النظام محافظ أي أن القوه مشتقة من دالة جهد تعتمد فقط على الاحداثى المعمم  فإن :



مثال:

جزء كتلته m يتحرك في مجال محافظ اوجد دالة لاجرانج ثم اوجد معادلات الحركة في الإحداثيات الاسطوانية

الحل:

الإحداثيات الاسطوانية  وهى الإحداثيات المعممة والسرعات  ( وتوجد ثلاث معادلات لاجرانج في هذه الحالة )



مثال:

جسم كتلته m يتحرك في مجال محافظ . أوجد دالة لاجرانج كذلك معادلات الحركة في الإحداثيات الكروية 

الحل:





وهذه هي معادلات الحركة في الإحداثيات الكروية حيث الطرف الأيسر هو القوى في الاتجاه نفسه.

الحركة في مجال مركزي 

* ادرس حركة جسيم في مجال مركزي باستخدام دالة لاجرانج

الحل:



ملحوظة : نظرية أويلر

تعريف:

تسمى الدالة  دالة متجانسة من الرتبة n إذا تحقق الشرط 

* عرف الدالة المتجانسة من الرتبة n

مثال:

اثبت أن الدالة متجانسة من الرتبة الثالثة

الحل:



فهي متجانسة من الرتبة الثالثة

مثال:

حدد أي من الدوال التالية متجانسة وأعطى رتبة كل منها:

1. x2 + y2 + z2 +xy + yz +xz (homogène ordre 2)
2. 3x – 2y +4z (homogène ordre 1)
3. xyz + 2xy + 2xz + 2yz (non- homogène)
4. (x + y + z) / x (homogène ordre zéro)
5. x3 tan -1 (y / x) (homogène ordre 3)
6. 4 sin (xy) (non-homogéne)
7. (x + y + z) / (x2 + y2 + z2) (homogène ordre 1)

ولهذا النوع من الدوال تطبق عليها نظرية اويلر والتي تنص على أن:-



بتفاضل طرفي المعادلة  بالنسبة إلى  نحصل على:



بوضع  نحصل على المعادلة المطلوبة

وهذه النظرية صحيحة إذا كانت F دالة في أكثر من ثلاث متغيرات وحيث أن طاقة الحركة دالة متجانسة من الرتبة الثانية في السرعات المعممة وحسب نظرية اويلر للدوال المتجانسة فان:



معادلات هاميلتون

نعلم من دراستنا السابقة انه يمكن وصف النظام باستخدام معادلات لاجرانج والتي توصف بدالة لاجرانج وهى دالة في الإحداثيات المعممة والسرعات المعممة.



وحيث أن 

ففي الإحداثيات الكارتيزية مثلاً:



ومن معادلة لاجرانج نجد أن







وبإدخال التعريف الآتي:



وتسمى هذه الدالة H بدالة هاميلتون للنظام أو الهاملتونيات ومن العلاقة السابقة نلاحظ أن H دالة في الإحداثيات المعممة  و الدفوع المعممة  والزمن t .



بمقارنة المعادلتين السابقتين نجد أن:



وهذه هي معادلات الحركة في الإحداثيات الجديدة وتسمى بمعادلات هاملتون القانونية . وهى معادلات تفاضلية عددها 2n+1 حيث n عدد درجات الحرية للنظام وهى تحل محل n من معادلات لاجرانج.

- استنتج معادلات هاميلتون.

 , , H

. وإذا كانت دالة هاميلتون تحتوى على الزمن صراحة

المعنى الفيزيائي للدالة H



حيث إن  ( لان طاقة الجهد تعتمد فقط على المسافة وربما الزمن )

أي أن H تعطى الطاقة الكلية للنظام.

ومن ناحية أخرى



بالتعويض من معادلات هاميلتون القانونية نجد أن :-



وإذا كانت دالة هاميلتون لا تحتوى على الزمن صراحة أى أن النظام محافظ



وهذا هو قانون بقاء الطاقة للأنظمة المحافظة.

* ما هو المعنى الفيزيائي لدالة هاميلتون إذا كان الهاميلتون لا يعتمد صراحة على الزمن فاثبت انه ثابت ويساوى الطاقة الكلية للنظام.

مثال:

* جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة وله دالة جهد V . اكتب دالة هاميلتون ومعادلات هاميلتون في الإحداثيات القطبية  .

الحل: -



فانه يلزم التخلص من  سوف نستخدم العلاقة:



للحصول على معادلات هاملتون نجد أن :-



و  كما سبق

مثال:

* جسيم يتحرك في المستوى x, y تحت تأثير قوة جاذبة تعتمد على المسافة من المركز. اوجد الهاملتون واكتب معادلات هاملتون للحركة.

الحل:



معادلات هاملتون

