جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

<u>التمرين 01</u>: لتكن المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\1&3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\5&4\end{pmatrix}$$

احسب $A+C$ ، $B+D$ ، $3A$ ، $A\times B$ ، $B\times A$ ، A^3 ، C^2 ، B^t ، $A\times B^t$ متى كان ذلك ممكنا.

<u>التمرين 02</u>: أوجد المصفوفات المرافقة لكل من التطبيقات الخطية التالية بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y)\mapsto 2x+y$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$x\mapsto(-x,2x,7x)$

3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y)\mapsto(3y,x)$

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y)\mapsto(3x+y,-x+y,x-5y)$

<u>التمرين 03</u>: ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$. و ليكن التطبيق الخطي:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\mapsto(x-y,x+z,y+z)$$

1) أوجد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

2) ليكن $a=(1,3,-1)$ ، $b=(1,3,0)$ ، $c=(1,2,-1)$

أ- بين أن $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- أوجد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني إلى الأساس B'، ثم أوجد P^{-1}.

ج- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام مصفوفة العبور.

د- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام التعريف.

<u>التمرين 04</u>: احسب بطريقتين محدد المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\1&2&-3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\\2&3&-4&-5\end{pmatrix}$$

<u>التمرين 05</u>: أوجد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات التالية -متى كان ذلك ممكنا-:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&0\\0&-3&-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}a&1\\-1&b\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك.ع.د.ع.ط.ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس: جبر 2
2020/2019

السلسلة 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

التمرين 01: لتكن المصفوفات:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\1&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\5&4\end{pmatrix}$$

حساب -متى كان ذلك ممكنا-:

* يكون الجمع بين المصفوفات ممكنا إذا كانت من نفس النوع أي:

$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M_{(\underset{\text{عدد الأسطر}}{m},\underset{\text{عدد الأعمدة}}{n})}(\mathbb{K})$$

$$A+B=C\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$$

حيث: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

1) $A+C$ لا يمكن

2) $B+D=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2&1+1\\-1+3&0-1\\1+5&3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&-1\\6&7\end{pmatrix}.$

$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda.A=D$

حيث: $d_{ij}=\lambda a_{ij}\ \forall\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$

$A\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})\Rightarrow(\lambda.A)\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$

3) $3A=3.\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.3&3.0\\3.(-2)&3.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0\\-6&3\end{pmatrix}.$

* يكون الجداء $(A\times B)$ ممكنا إذا كان عدد أعمدة A مساويا عدد أسطر B أي:

$A=(a_{ij})\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$

$B=(b_{ij})\in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

يمكن تعريف المصفوفة $A\times B$

$A\times B=(c_{ij})\in M_{(m,p)}(\mathbb{K})$

كما يلي: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

4) $\underset{(2,2)}{A}\times\underset{(3,2)}{B}$ لا يمكن

5) $\underset{(3,2)}{B}\times\underset{(2,2)}{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2.3+1.(-2)&2.0+1.1\\(-1).3+0.(-2)&(-1).0+0.1\\1.3+3.(-2)&1.0+3.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\-3&0\\-3&3\end{pmatrix}.$

6) $A^3=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3.3+0.(-2)&3.0+0.1\\(-2).3+1.(-2)&(-2).0+1.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&0\\-8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9.3+0.(-2)&9.0+0.1\\(-8).3+1(-2)&(-8).0+1.1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}27&0\\-26&1\end{pmatrix}$

7) $C^2=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-12&9\\-8&4&4\\-6&-12&18\end{pmatrix}.$

* $A=(a_{ij})\in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$

المصفوفة $C=(c_{ij})$ حيث:

$c_{ij}=a_{ji}\quad\forall\ i=\overline{1,m},\ \forall\ j=\overline{1,n}$

تسمى منقول A ونرمز لها بالرمز A^t وهي من الصنف (n,m)، (منقول A بحول الأسطر إلى أعمدة والعكس).

8) $B^t=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\1&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&3\end{pmatrix}.$

9) $\underset{(2,2)}{A}\times\underset{(2,3)}{B^t}=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&3\\-3&2&1\end{pmatrix}.$

التمرين 02: ايجاد المصفوفات المرافقة لكل من التطبيقات الخطية التالية بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول:

تعريف: $f:E\longrightarrow F$ تطبيق خطي

$B_E=\{e_1,\dots,e_n\}$ أساس لـ E.

$B_F=\{e'_1,\dots,e'_m\}$ أساس لـ F.

المصفوفة المرافقة لـ f حسب الأساسين B_E و B_F (أو نقول المصفوفة المشاركة لـ f) تكتب على الشكل:

$$M(f,B_E,B_F) \overset{\text{تعريفا}}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{array}$$

العمود الأول يحوي احداثيات $f(e_1)$ في الأساس B_F

العمود الثاني " " $f(e_2)$ " B_F

⋮

العمود n يحوي احداثيات $f(e_n)$ في الأساس B_F.

نرمز بـ :

$B=\{e=1\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}$.

$B'=\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$.

$B''=\{e'_1=(1,0,0),\ e'_2=(0,1,0),\ e'_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

1) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto 2x+y$

$f(e_1)=f(1,0)=2.1+0=2=2.1$

$f(e_2)=f(0,1)=2.0+1=1=1.1$.

$$\Rightarrow M_1(f,B',B)= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \end{array}$$

2) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$x \longmapsto (-x,2x,7x)$.

$f(e)=f(1)=(-1,2,7)$

$=(-1).(1,0,0)+2.(0,1,0)+7.(0,0,1)$

$=-1.e'_1+2.e'_2+7.e'_3$

$$\Rightarrow M_2(f,B,B'')= \begin{array}{c} f(e) \\ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 7 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

3) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (3y,x)$

$f(e_1)=f(1,0)=(0,1)=0.(1,0)+1.(0,1)=0.e_1+1.e_2$

$f(e_2)=f(0,1)=(3,0)=3.(1,0)+0.(0,1)=3.e_1+0.e_2$

$$\Rightarrow M_3(f,B,B)= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

4) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (3x+y,-x+y,x-5y)$

$f(e_1)=f(1,0)=(3,-1,1)$

$=3.(1,0,0)+(-1).(0,1,0)+1.(0,0,1)$

$=3.e'_1+(-1).e'_2+1.e'_3$

$f(e_2)=f(0,1)=(1,1,-5)$

$=1.(1,0,0)+1.(0,1,0)+(-5).(0,0,1)$

$=1.e'_1+1.e'_2+(-5).e'_3$

$$\Rightarrow M_4(f,B',B'')= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

التمرين 03: ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، وليكن التطبيق الخطي:

$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x-y,x+z,y+z)$

1) ايجاد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$:

$f(e_1)=f(1,0,0)=(1,1,0)=1.e_1+1.e_2+0.e_3$

$f(e_2)=f(0,1,0)=(-1,0,1)=(-1).e_1+0.e_2+1.e_3$

$f(e_3)=f(0,0,1)=(0,1,1)=0.e_1+1.e_2+1.e_3$

$$\Rightarrow M(f,B,B)= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2) ليكن $a=(1,3,-1)$ ، $b=(1,3,0)$ ، $c=(1,2,-1)$

أ- نبين أن $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$:

بما أن: $\text{card}\, B'=3=\dim \mathbb{R}^3$ فإنه

يكفي اثبات أن: a، b، c مستقلة خطيا:

ليكن $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha.a+\beta.b+\gamma.c=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \alpha(1,3,-1)+\beta.(1,3,0)+\gamma(1,2,-1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma,\ 3\alpha+3\beta+2\gamma,\ -\alpha-\gamma)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 & \text{---}(1) \\ 3\alpha+3\beta+2\gamma=0 & \text{---}(2) \\ -\alpha-\gamma=0 & \text{---}(3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow \alpha=-\gamma$.

$(1) \Rightarrow -\gamma+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \beta=0$.

$(2) \Rightarrow 3.(-\gamma)+3.(0)+2\gamma=0$

$\Rightarrow -3\gamma+2\gamma=0 \Rightarrow -\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0$

$\Rightarrow \alpha=0$.

ومنه: $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- ايجاد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني B إلى الأساس B' :

$$a=(1,3,-1)=1.e_1+3.e_2+(-1)e_3$$
$$b=(1,3,0)=1.e_1+3.e_2+0.e_3$$
$$c=(1,2,-1)=1.e_1+2.e_2+(-1).e_3$$

$$\Rightarrow P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

نلاحظ أن: مصفوفة العبور من الأساس القانوني B إلى الأساس B' تحصلنا عليها من كتابة أشعة الأساس B' بدلالة أشعة الأساس B.

* تعيين P^{-1} :

P^{-1} : هي مصفوفة العبور من الأساس B' إلى الأساس القانوني B.

أي: نتحصل عليها من كتابة أشعة الأساس القانوني B بدلالة أشعة الأساس B'.

لدينا مما سبق :

$$\begin{cases} a=e_1+3e_2-e_3 & \dots (1) \\ b=e_1+3e_2 & \dots (2) \\ c=e_1+2e_2-e_3 & \dots (3) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow a-b=-e_3$

$\Rightarrow e_3=-a+b$

$(1)-(3) \Rightarrow a-c=e_2$

إذن : $(2) \Rightarrow b=e_1+3(a-c)$

$\Rightarrow b=e_1+3a-3c$

$\Rightarrow e_1=-3a+b+3c$.

إذن :

$$\begin{cases} e_1=(-3).a+1.b+3.c \\ e_2=1.a+0.b+(-1).c \\ e_3=(-1).a+1.b+0.c \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

ج- ايجاد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام مصفوفة العبور :

$$M(f,B',B')=P^{-1}.M(f,B,B).P$$

$$M(f,B',B')=\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

د- ايجاد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام التعريف :

$$f(a)=f(1,3,-1)$$
$$=(-2,0,2)$$
$$=\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c$$
$$=\alpha_1(1,3,-1)+\beta_1(1,3,0)+\gamma_1(1,2,-1)$$
$$=(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\ 3\alpha_1+3\beta_1+2\gamma_1,\ -\alpha_1-\gamma_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=-2 & \dots (1) \\ 3\alpha_1+3\beta_1+2\gamma_1=0 & \dots (2) \\ -\alpha_1-\gamma_1=2 & \dots (3) \end{cases}$$

$(1)+(3) \Rightarrow \beta_1=0$

$(3) \Rightarrow \alpha_1=-\gamma_1-2$

$(2) \Rightarrow 3(-\gamma_1-2)+3.0+2\gamma_1=0$

$\Rightarrow -3\gamma_1-6+2\gamma_1=0$

$\Rightarrow -\gamma_1=6 \Rightarrow \gamma_1=-6$

$\alpha_1=-\gamma_1-2=6-2 \Rightarrow \alpha_1=4$

إذن :

$$\boxed{f(a)=4a+0.b-6.c}$$

$$f(b)=f(1,3,0)$$
$$=(-2,1,3)$$
$$=\alpha_2.a+\beta_2.b+\gamma_2.c$$
$$=\alpha_2(1,3,-1)+\beta_2(1,3,0)+\gamma_2(1,2,-1)$$
$$=(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2,\ 3\alpha_2+3\beta_2+2\gamma_2,\ -\alpha_2-\gamma_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=-2 & \dots (1') \\ 3\alpha_2+3\beta_2+2\gamma_2=1 & \dots (2') \\ -\alpha_2-\gamma_2=3 & \dots (3') \end{cases}$$

$(1')+(3') \Rightarrow \beta_2=1$

$(3') \Rightarrow \alpha_2=-\gamma_2-3$

$(2') \Rightarrow 3(-\gamma_2-3)+3(1)+2\gamma_2=1$

$\Rightarrow -3\gamma_2-9+3+2\gamma_2=1 \Rightarrow \gamma_2=-7$

$\alpha_2 = -\gamma_2 - 3 = 7 - 3 \Rightarrow \alpha_2 = 4$

إذن : $\boxed{f(b) = 4a + 1.b + (-7).c}$

$$\begin{aligned} f(c) &= f(1,2,-1) \\ &= (-1,0,1) \\ &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c \\ &= \alpha_3(1,3,-1) + \beta_3(1,3,0) + \gamma_3(1,2,-1) \\ &= (\alpha_3+\beta_3+\gamma_3,\ 3\alpha_3+3\beta_3+2\gamma_3,\ -\alpha_3-\gamma_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = -1 & \dots (1'') \\ 3\alpha_3+3\beta_3+2\gamma_3 = 0 & \dots (2'') \\ -\alpha_3-\gamma_3 = 1 & \dots (3'') \end{cases}$$

$(1'') + (3'') \Rightarrow \beta_3 = 0$

$(3'') \Rightarrow \alpha_3 = -\gamma_3 - 1$

$(2'') \Rightarrow 3(-\gamma_3 - 1) + 3.0 + 2\gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -3\gamma_3 - 3 + 2\gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -\gamma_3 = 3 \Rightarrow \gamma_3 = -3$

$\alpha_3 = -\gamma_3 - 1 = 3 - 1 \Rightarrow \alpha_3 = 2$

إذن : $\boxed{f(c) = 2.a + 0.b - 3.c}$

$$\Rightarrow M(f,B',B') = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(a) & f(b) & f(c) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

التمرين 04 : نحسب بطريقتين محدد المصفوفات التالية :

- الطريقة الأولى هي الطريقة المباشرة .
- الطريقة الثانية هي تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية علوية أو مثلثية سفلية باستعمال خواص المحددات ثم حساب محددها حيث محدد هذه الأخيرة هو جداء عناصر قطرها الرئيسي .

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(ط1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - (-1)\times 2 = +2$

(ط2) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_2-2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = +2$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(ط1)

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(0.(-3) - 2.1) + 1(1.(-3) - 1.1) - 1(1.2 - 0.1) \\ &= 1.(-2) + 1.(-4) - 1.2 = (-2) + (-4) + (-2) = -8. \end{aligned}$$

(ط2)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{L_3-3L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$= 1.1.(-8) = -8.$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

(ط1)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 5$$

(ط2)

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2-2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1.5.(-1).(-1) = 5$

التمرين 05 : ايجاد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات التالية - متى كان ذلك ممكنا - :

A قابلة للقلب $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

حيث $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

نرمز لمقلوب المصفوفة A بـ A^{-1} وتعطى بالعلاقة التالية :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com A)^t}$$

و $com A = (a'_{ij})$ هي مصفوفة ناتجة من A حيث: $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

و A_{ij} هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i والعمود j.

نسمي $com A$ بالمصفوفة المرافقة لـ A.

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L'_3 - L'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.0 = 0$$

بما أن: $\det A = 0$ فإن: A غير قابلة للقلب.

② $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \underset{L_2 + \frac{1}{2}L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \underset{L'_3 + 3L'_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2.1.\left(-\frac{13}{2}\right) = -13 \neq 0$$

اذن: B قابلة للقلب.

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (com B)^t$$

$com B = (b'_{ij})$ هي مصفوفة ناتجة من B حيث:

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$$

أي نبحث عن العناصر:

$$com B = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}$$

$b'_{11} = (-1)^{1+1} \det(B_{11})$

$= 1 . \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5$

$b'_{12} = (-1)^{1+2} \det(B_{12})$

$= (-1) . \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1) . 5 = -5$

$b'_{13} = (-1)^{1+3} \det(B_{13})$

$= 1 . \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3.$

$b'_{21} = (-1)^{2+1} \det(B_{21})$

$= (-1) . \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) . (-3) = 3$

$b'_{22} = (-1)^{2+2} \det(B_{22})$

$= 1 . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10$

$b'_{23} = (-1)^{2+3} \det(B_{23})$

$= (-1) . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) . (-6) = 6$

$b'_{31} = (-1)^{3+1} \det(B_{31})$

$= 1 . \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$b'_{32} = (-1)^{3+2} \det(B_{32})$

$= (-1) . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$b'_{33} = (-1)^{3+3} \det(B_{33})$

$= 1 . \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

اذن:

$$com B = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 3 \\ 3 & -10 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (com B)^t = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -5 & -10 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -5 & -10 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}$$

③ $C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \quad , \ a, b \in \mathbb{R}$

$$\det C = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = ab + 1$$

• إذا كان : $ab+1=0$ أي : $ab=-1$
فإن : C غير قابلة للقلب .
• إذا كان : $ab+1\neq 0$ فإن : C قابلة للقلب

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\left(\operatorname{com} C\right)^t$$

نبحث عن : $\operatorname{com} C$

$$\operatorname{com} C=\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix}$$

$$c'_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\det\left(C_{11}\right)=1\cdot b=b.$$
$$c'_{12}=(-1)^{1+2}\det\left(C_{12}\right)=(-1)\cdot(-1)=1$$
$$c'_{21}=(-1)^{2+1}\det\left(C_{21}\right)=(-1)\cdot 1=-1$$
$$c'_{22}=(-1)^{2+2}\det\left(C_{22}\right)=1\cdot a=a$$

$$\Rightarrow \operatorname{com} C=\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\operatorname{com} C\right)^t=\begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

ومنه :
$$\boxed{C^{-1}=\frac{1}{ab+1}\begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}$$

④ $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

إذن : D قابلة للقلب

$$D^{-1}=\frac{1}{\det D}\left(\operatorname{com} D\right)^t$$

نبحث عن : $\operatorname{com} D$

$$\operatorname{com} D=\begin{pmatrix} d'_{11} & d'_{12} \\ d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix}$$

$$d'_{11}=(-1)^{1+1}\det\left(D_{11}\right)=1\cdot 0=0$$
$$d'_{12}=(-1)^{1+2}\det\left(D_{12}\right)=(-1)\cdot 2=-2$$
$$d'_{21}=(-1)^{2+1}\det\left(D_{21}\right)=(-1)\cdot(-1)=1$$
$$d'_{22}=(-1)^{2+2}\det\left(D_{22}\right)=1\cdot 1=1$$

$$\Rightarrow \operatorname{com} D=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\operatorname{com} D\right)^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه :
$$\boxed{D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

ملاحظة :
جداء مصفوفة بمقلوبها يساوي المصفوفة الحيادية .