جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

<u>التمرين</u> 05: أوجد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات التالية -متى كان ذلك ممكنا-:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&0\\0&-3&-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}a&1\\-1&b\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

التمرين 05: ايجاد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات التالية - متى كان ذلك ممكنا - :

A قابلة للقلب $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

حيث $A=(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

نرمز لمقلوب المصفوفة A بـ A^{-1} وتعطى بالعلاقة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com} A)^t$$

و $\text{com} A = (a'_{ij})$ هي مصفوفة ناتجة من A حيث : $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

و A_{ij} هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i والعمود j .

نسمي $\text{com} A$ بالمصفوفة المرافقة لـ A

① $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L'_3-L'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.0 = 0$$

بما أن: $\det A = 0$ فإن: A غير قابلة للقلب .

② $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \underset{L_2+\frac{1}{2}L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \underset{L'_3+3L'_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2.1\left(-\frac{13}{2}\right) = -13 \neq 0$$

اذن : B قابلة للقلب .

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{com} B)^t$$

$\text{com} B = (b'_{ij})$ هي مصفوفة ناتجة من B حيث:

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(B_{ij})$$

أي نبحث عن العناصر :

$$\text{com} B = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}$$

$$b'_{11} = (-1)^{1+1} \det(B_{11}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5$$

$$b'_{12} = (-1)^{1+2} \det(B_{12}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 = -5$$

$$b'_{13} = (-1)^{1+3} \det(B_{13}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 .$$

$$b'_{21} = (-1)^{2+1} \det(B_{21}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$b'_{22} = (-1)^{2+2} \det(B_{22}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

$$b'_{23} = (-1)^{2+3} \det(B_{23}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6) = 6$$

$$b'_{31} = (-1)^{3+1} \det(B_{31}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$b'_{32} = (-1)^{3+2} \det(B_{32}) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$b'_{33} = (-1)^{3+3} \det(B_{33}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

اذن :

$$\text{com} B = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 3 \\ 3 & -10 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\text{com} B)^t = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -5 & -10 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$d'_{11} = (-1)^{1+1} \det(D_{11}) = 1 \cdot 0 = 0$

$d'_{12} = (-1)^{1+2} \det(D_{12}) = (-1) \cdot 2 = -2$

$d'_{21} = (-1)^{2+1} \det(D_{21}) = (-1) \cdot (-1) = 1$

$d'_{22} = (-1)^{2+2} \det(D_{22}) = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow com D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (com D)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه :

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

ملاحظة :

جداء مصفوفة بمقلوبها يساوي المصفوفة الحيادية .

ومنه :

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -5 & -10 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}}$$

③ $C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\det C = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = ab + 1$

- اذا كان : $ab+1=0$ أي : $ab=-1$ فإن : C غير قابلة للقلب .
- اذا كان : $ab+1 \neq 0$ فإن : C قابلة للقلب

$C^{-1} = \frac{1}{\det C} (com\, C)^t$

نبحث عن : $com\, C$

$com\, C = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix}$

$c'_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(C_{11}) = 1 \cdot b = b$.

$c'_{12} = (-1)^{1+2} \det(C_{12}) = (-1) \cdot (-1) = 1$

$c'_{21} = (-1)^{2+1} \det(C_{21}) = (-1) \cdot 1 = -1$

$c'_{22} = (-1)^{2+2} \det(C_{22}) = 1 \cdot a = a$

$\Rightarrow com\, C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow (com C)^t = \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

ومنه :

$$\boxed{C^{-1} = \frac{1}{ab+1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}$$

④ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

اذن : D قابلة للقلب

$D^{-1} = \frac{1}{\det D} (com\, D)^t$

نبحث عن : $com\, D$

$com\, D = \begin{pmatrix} d'_{11} & d'_{12} \\ d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix}$