جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 03
التطبيقات الخطية

التمرين 03: ليكن $\mathbb{P}_1[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة 1 أو أقل ذات معاملات حقيقية. نعرف التطبيق:

$$g: \quad \mathbb{P}_1[X] \to \mathbb{R}^2$$
$$P \quad \mapsto g(P) = \big(P(-1), P(1)\big)$$

بين أن g خطي تقابلي.

التمرين 03:

نبين أن: g خطي

ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ، $P,Q \in \mathbb{P}_1[X]$.

$$\begin{aligned} g(\alpha P+\beta Q) &= \big((\alpha P+\beta Q)(-1), (\alpha P+\beta Q)(1)\big) \\ &= \big((\alpha P)(-1)+(\beta Q)(-1), (\alpha P)(1)+(\beta Q)(1)\big) \\ &= \big(\alpha\cdot P(-1)+\beta Q(-1), \alpha\cdot P(1)+\beta\cdot Q(1)\big) \\ &= \big(\alpha\cdot P(-1), \alpha\cdot P(1)\big)+\big(\beta Q(-1), \beta Q(1)\big) \\ &= \alpha\big(P(-1), P(1)\big)+\beta\big(Q(-1), Q(1)\big) \\ &= \alpha\, g(P)+\beta\, g(Q). \end{aligned}$$

اذن: g خطي .

اثبات أن: g تقابلي :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, g &= \{P\in \mathbb{P}_1[X] : g(P) = 0_{\mathbb{R}^2}\} \\ &= \{P=(aX+b)\in \mathbb{P}_1[X] : g(P) = (0,0)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(P) = (0,0) &\Rightarrow (P(-1), P(1)) = (0,0) \\ &\Rightarrow (-a+b, a+b) = (0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 & (1) \\ a+b=0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0.$

$(1) \Rightarrow a=0.$

$\Rightarrow P=0$

اذن: $\mathrm{Ker}\, g=\{0_{\mathbb{P}_1[X]}\}$ ومنه: g متباين .

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, g &= \{Y\in \mathbb{R}^2, \exists P\in \mathbb{P}_1[X] : Y = g(P)\} \\ &= \{Y=(x',y')\in \mathbb{R}^2, \exists P\in \mathbb{P}_1[X] : (x',y')= g(P)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y\in \mathrm{Im}\, g \Rightarrow Y=(x',y') &= g(P) = (P(-1), P(1)). \\ &=(-a+b, a+b) = (-a, a)+(b, b) \\ &=a(-1,1)+b(1,1) \end{aligned}$$

$(-1,1)$ ، $(1,1)$ يولدان $\mathrm{Im}\, g$ ، بعد دراسة الاستقلال الخطي لهما نجدهما مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ $\mathrm{Im}\, g$

اذن: $\dim \mathrm{Im}\, g=2$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Im}\, g \subset \mathbb{R}^2 \\ &\dim \mathrm{Im}\, g = 2=\dim \mathbb{R}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^2$$

اذن: g غامر

ومنه: g تقابلي .