

السنة الأولى MI
مقياس جبر 2
2020/2019

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السلسلة رقم 03
التطبيقات الخطية

التمرين 02: ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 . $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ خطي بحيث:

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f(e_2) = 3e_1 + 4e_2, \quad f(e_3) = -e_1$$

(1) ليكن $a = (0,0,1)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,1,1)$. أوجد $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ و $f(c)$ دون حساب عبارة f .

(2) اوجد عبارة $f(x, y, z)$.

(3) تحقق أن الجملة $B' = \{a, b, c\}$ أساس لـ \mathbb{R}^3 .

(4) هل الجملة $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ \mathbb{R}^3 ؟

(5) هل f تقابل؟

السلسلة 03

التطبيقات الخطية

تمرين 02: ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 .

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ خطي بحيث

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3.$$

$$f(e_2) = 3e_1 + 4e_2.$$

$$f(e_3) = -e_1.$$

(1) ليكن $a = (0, 0, 1)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 1, 1)$

ايجاد $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ دون حساب عبارة f .
 $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ الأساس القانوني لـ \mathbb{R}^3 .
 نعلم أن:

$$\forall X = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

$$\Rightarrow a(0, 0, 1) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3.$$

$$\Rightarrow f(a) = f(0, 0, 1) = f(0e_1 + 0e_2 + 1e_3)$$

$$= 0f(e_1) + 0f(e_2) + 1f(e_3)$$

$$= f(e_3) = -e_1 = (-1, 0, 0)$$

$$f(b) = f(1, 0, 1) = f(1e_1 + 0e_2 + 1e_3)$$

$$= 1f(e_1) + 0f(e_2) + 1f(e_3)$$

$$= f(e_1) + f(e_3) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 - e_1$$

$$= e_1 + e_2 + 2e_3 = (1, 1, 2)$$

$$f(c) = f(1, 1, 1) = f(1e_1 + 1e_2 + 1e_3)$$

$$= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$$

$$= 2e_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_1 + 4e_2 - e_1$$

$$= 4e_1 + 5e_2 + 2e_3 = (4, 5, 2).$$

(2) ايجاد عبارة $f(x, y, z)$

بيان $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساس قانوني لـ \mathbb{R}^3 فإن:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \exists x, y, z \in \mathbb{R}: X = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

اذن نعين:

$$f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$

$$f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \text{ (دون تطبيق نظرية)}$$

$$= x(2e_1 + e_2 + 2e_3) + y(3e_1 + 4e_2) + z(-e_1)$$

$$= (2x + 3y - z)e_1 + (x + 4y)e_2 + (2x) e_3.$$

$$= (2x + 3y - z, x + 4y, 2x)$$

(3) التحقق ان الجلة $B = \{a, b, c\}$ لـ \mathbb{R}^3

بيان: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ و $\text{card } B = 3$

اذن يكفي ان نبين ان الجلة B مستقلة خطيا.
 ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \alpha(0, 0, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 & \text{--- (1)} \\ \gamma = 0 & \text{--- (2)} \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\text{(2)} \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\text{(1)} \Rightarrow \beta = -\gamma = 0.$$

$$\text{(3)} \Rightarrow \alpha = -\beta - \gamma = 0.$$

اذن: الجلة B مستقلة خطيا فهي تشكل اساسا لـ \mathbb{R}^3 .

(4) هل الجلة $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ لـ \mathbb{R}^3 مما سبق لدينا:

$$B'' = \left\{ \begin{matrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{matrix} \right\} = \left\{ (-1, 0, 0), (1, 1, 2), (4, 5, 2) \right\}.$$

بيان: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ و $\text{card } B'' = 3$

اذن: يكفي ان نبين ان الجلة B'' مستقلة خطيا.
 ليكن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha(-1, 0, 0) + \beta(1, 1, 2) + \gamma(4, 5, 2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 & \text{--- (1)} \\ \beta + 5\gamma = 0 & \text{--- (2)} \\ 2\beta + 2\gamma = 0 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\text{(2)} \Rightarrow \beta = -5\gamma.$$

$$\text{(1)} \Rightarrow -\alpha - 5\gamma + 4\gamma = 0.$$

$$\Rightarrow -\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\gamma.$$

$$\text{(3)} \Rightarrow -\gamma - 5\gamma + 4\gamma = 0$$

$$\Rightarrow -2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$

اذن: الجلة B'' مستقلة خطيا فهي تشكل اساسا لـ \mathbb{R}^3 .

(5) هل f تقابل P .

نظرية: $f: E \rightarrow F$ خطي $\{e_1, e_2, e_3\}$ اساس لـ E
 f تقابل $\Leftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ اساس لـ F

لدينا: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: f$ خطية و $B = \{a, b, c\}$ أساس \mathbb{R}^3

بيان: $B' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس \mathbb{R}^3

حسب النظرية السابقة: f قابل

$$(a, b, c) \rightarrow (f(a), f(b), f(c))$$

الأساس B' هو الأساس الجديد
 حيث $B = \{a, b, c\}$ و $B' = \{f(a), f(b), f(c)\}$
 نريد إثبات أن B' أساس \mathbb{R}^3
 نستخدم النظرية السابقة

$$\begin{aligned} x_1 a + x_2 b + x_3 c &= 0 \\ (x_1, x_2, x_3) \cdot (a, b, c) &= (0, 0, 0) \\ \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 b_1 + x_3 c_1 = 0 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 + x_3 c_2 = 0 \\ x_1 a_3 + x_2 b_3 + x_3 c_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

لذلك B' هو الأساس الجديد
 لأن B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$

نلاحظ أن f خطية
 لذلك B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

لذلك B' هو الأساس الجديد
 لأن B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$

نريد إثبات أن B' أساس \mathbb{R}^3
 نستخدم النظرية السابقة

الأساس B' هو الأساس الجديد
 حيث $B = \{a, b, c\}$ و $B' = \{f(a), f(b), f(c)\}$

نريد إثبات أن B' أساس \mathbb{R}^3
 نستخدم النظرية السابقة

$$\begin{aligned} x_1 a + x_2 b + x_3 c &= 0 \\ (x_1, x_2, x_3) \cdot (a, b, c) &= (0, 0, 0) \\ \begin{cases} x_1 a_1 + x_2 b_1 + x_3 c_1 = 0 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 + x_3 c_2 = 0 \\ x_1 a_3 + x_2 b_3 + x_3 c_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لذلك B' هو الأساس الجديد
 لأن B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$

نلاحظ أن f خطية
 لذلك B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

لذلك B' هو الأساس الجديد
 لأن B' هو الأساس الجديد

$$\begin{aligned} f(a) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(b) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \\ f(c) &= x_1 f(a) + x_2 f(b) + x_3 f(c) \end{aligned}$$