جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 03
التطبيقات الخطية

<u>التمرين 02</u>: ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ خطي بحيث:

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3,\ f(e_2) = 3e_1 + 4e_2,\ f(e_3) = -e_1$$

1) ليكن $a = (0,0,1)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,1,1)$. أوجد $f(a), f(b)$ و $f(c)$ دون حساب عبارة f.

2) اوجد عبارة $f(x, y, z)$.

3) تحقق أن الجملة $B' = \{a, b, c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

4) هل الجملة $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$؟

5) هل f تقابل؟

جامعة محمد خيضر بسكرة
ك.ع.د.ع.ط.ح
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس: جبر 1
2020/2019

السلسلة 03
التطبيقات الخطية

التمرين 02: ليكن $\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$. $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ خطي بحيث

$f(e_1)=2e_1+e_2+2e_3$.

$f(e_2)=3e_1+4e_2$.

$f(e_3)=-e_1$.

1) ليكن $a=(0,0,1)$ ، $b=(1,0,1)$ ، $c=(1,1,1)$ ،
ايجاد $f(a)$، $f(b)$، $f(c)$ دون حساب عبارة f :

$\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.
نعلم أن:

$\forall X=(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$.

$\Rightarrow a=(0,0,1)=0.e_1+0.e_2+1.e_3$.

$\Rightarrow f(a)=f(0,0,1)=f(0e_1+0e_2+1e_3)$ (لأن f تطبيق خطي)

$=0f(e_1)+0f(e_2)+1f(e_3)$

$=f(e_3)=-e_1=(-1,0,0)$

$f(b)=f(1,0,1)=f(1e_1+0e_2+1e_3)$

$=1f(e_1)+0f(e_2)+1f(e_3)$

$=f(e_1)+f(e_3)=2e_1+e_2+2e_3-e_1$

$=e_1+e_2+2e_3=(1,1,2)$

$f(c)=f(1,1,1)=f(1e_1+1e_2+1e_3)$

$=f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)$

$=2e_1+e_2+2e_3+3e_1+4e_2-e_1$

$=4e_1+5e_2+2e_3=(4,5,2)$.

2) ايجاد عبارة $f(x,y,z)$:

بما أن $\{e_1,e_2,e_3\}$ أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$ فإن:

$\forall X\in\mathbb{R}^3, \exists x,y,z\in\mathbb{R}: X=xe_1+ye_2+ze_3$.

اذن نعين:

$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$

$f(x,y,z)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ (لأن f تطبيق خطي)

$=x(2e_1+e_2+2e_3)+y(3e_1+4e_2)+z\cdot(-e_1)$

$=(2x+3y-z)e_1+(x+4y)e_2+(2x)e_3$.

$=(2x+3y-z, x+4y, 2x)$

3) التحقق أن الجملة $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$:

بما أن: $\operatorname{card} B'=3$ و $\dim\mathbb{R}^3=3$

اذن: يكفي أن نبين أن الجملة B' مستقلة خطيا.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \alpha(0,0,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta+\gamma=0 & \text{—— ①}\\ \gamma=0 & \text{—— ②}\\ \alpha+\beta+\gamma=0 & \text{—— ③}\end{cases}$$

② $\Rightarrow \gamma=0$

① $\Rightarrow \beta=-\gamma=0$.

③ $\Rightarrow \alpha=-\beta-\gamma=0$.

اذن: الجملة B' مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

4) هل الجملة $B''=\{f(a),f(b),f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ؟

مما سبق لدينا:

$B''=\{\overset{f(a)}{(-1,0,0)},\overset{f(b)}{(1,1,2)},\overset{f(c)}{(4,5,2)}\}$.

بما أن: $\operatorname{card} B''=3$ و $\dim\mathbb{R}^3=3$

اذن: يكفي أن نبين أن الجملة B'' مستقلة خطيا:

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha(-1,0,0)+\beta(1,1,2)+\gamma(4,5,2)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta+4\gamma=0 & \text{—— (1)}\\ \beta+5\gamma=0 & \text{—— (2)}\\ 2\beta+2\gamma=0 & \text{—— (3)}\end{cases}$$

② $\Rightarrow \beta=-5\gamma$.

① $\Rightarrow -\alpha-5\gamma+4\gamma=0$.

$\Rightarrow -\alpha-\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-\gamma$.

① $\Rightarrow -\gamma-5\gamma+4\gamma=0$

$\Rightarrow -2\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0$.

$\Rightarrow \alpha=0$

$\Rightarrow \beta=0$

اذن: الجملة B'' مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

5) هل f تقابل؟

نظرية:

$f:E\longrightarrow F$ خطي، $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ E
f تقابل $\Leftrightarrow$ $\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ F

لدينا : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ خطي، و $B' = \{a, b, c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

بيان : $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

حسب النظرية السابقة : f تقابل .