جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 03

التطبيقات الخطية

<u>التمرين 01</u>: ليكن التطبيقين:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$$g: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

1- بين أن f و g خطيين.

2- أوجد $\mathrm{Ker}f$. $\mathrm{Ker}g$. $\mathrm{Im}f$. $\mathrm{Im}g$. $\mathrm{rg}f$. $\mathrm{rg}g$.

3- هل f و g متباينين؟ غامرين؟

4- هل $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ ؟

5- بين أنه: إذا كان $u \in \mathrm{Im}f$ فإن $f(u) = u$.

السلسلة 03 التطبيقات الخطية

التمرين 01: ليكن التطبيقين:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

1) نبين أن: f و g خطيين:

تعريف: ليكن $(E,+,\cdot)$ و $(F,+,\cdot)$ ف.ش على نفس الحقل $\mathbb{K}$
وليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيق.
نقول أن f خطي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall X,Y \in E : f(\alpha\cdot X+\beta\cdot Y) = \alpha\cdot f(X) + \beta\cdot f(Y).$$

أو الشرطين:

$$\forall X,Y \in E : f(X+Y) = f(X)+f(Y) \quad ①$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X \in E : f(\alpha\cdot X) = \alpha\cdot f(X) \quad ②$$

f ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ، $X,Y \in E=\mathbb{R}^2$:

$X \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow X=(x,y)$
$Y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow Y=(x',y')$

$$f(\alpha X+\beta Y) = f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f((\alpha x,\alpha y)+(\beta x',\beta y'))$$
$$= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$$
$$= \left(\frac{(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')}{2}, \frac{(\alpha y+\beta y')-(\alpha x+\beta x')}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'}{2}, \frac{\alpha y+\beta y'-\alpha x-\beta x'}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha x-\alpha y+\beta x'-\beta y'}{2}, \frac{\alpha y-\alpha x+\beta y'-\beta x'}{2}\right) \quad \text{----}(1)$$

(1)

$$\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

$$=\alpha\cdot\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)+\beta\cdot\left(\frac{x'-y'}{2},\frac{y'-x'}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha(x-y)}{2},\alpha\frac{(y-x)}{2}\right)+\left(\beta\frac{(x'-y')}{2},\beta\frac{(y'-x')}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha x-\alpha y}{2},\frac{\alpha y-\alpha x}{2}\right)+\left(\frac{\beta x'-\beta y'}{2},\frac{\beta y'-\beta x'}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha x-\alpha y}{2}+\frac{\beta x'-\beta y'}{2},\left(\frac{\alpha y-\alpha x}{2}\right)+\left(\frac{\beta y'-\beta x'}{2}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha x-\alpha y+\beta x'-\beta y'}{2},\frac{\alpha y-\alpha x-\beta y'-\beta x'}{2}\right)\quad\cdots(2)$$

من (1) و(2) نجد :

$$f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$$

ومنه : f خطي .

نبين g ②

$X,Y\in E=\mathbb{R}^2$ ، $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$X\in\mathbb{R}^2\Rightarrow X=(x,y)$

$Y\in\mathbb{R}^2\Rightarrow Y=(x',y')$

$$g(\alpha X+\beta Y)=g(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))$$

$$=g(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')$$

$$=(2(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y'),(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y'))$$

$$=(2\alpha x+2\beta x'-\alpha y-\beta y',\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y')$$

$$=(2\alpha x-\alpha y+2\beta x'-\beta y',\alpha x-\alpha y+\beta x'-\beta y')$$

$$=(2\alpha x-\alpha y,\alpha x-\alpha y)+(2\beta x'-\beta y',\beta x'-\beta y')$$

$$=\alpha(2x-y,x-y)+\beta(2x'-y',x'-y')$$

$$=\alpha\cdot g(x,y)+\beta\cdot g(x',y')$$

$$=\alpha g(X)+\beta g(Y)$$

ومنه : g خطي .

2) ايجاد Kerf ، Korg ، Imf ، Img ، rgf ، rgg :

(*) Kerf :

$f : E \longrightarrow F$ تطبيق خطي

نواة التطبيق الخطي $\text{Ker} f = \{X \in E : f(X) = 0_F\} \subset E$

$\text{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow$ f متباين

$$\text{Ker} f = \{X \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$
$$= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0)\}.$$

$$f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y.$$

معادلتان متكافئتان

$$\Rightarrow \text{Ker} f = \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}.$$

نبحث عن الاشعة التي تولد Kerf :

$$X \in \text{Ker} f \Rightarrow X = (x,y) = (x,x) = x(\underbrace{1,1}_{u})$$

عدد حقيقي

$$\Rightarrow \text{Ker} f = [\{(1,1)\}]$$

اذن : $\underbrace{(1,1)}_{u}$ يولد Kerf وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساسا له

و $\dim \text{Ker} f = 1$

$$\text{Ker} f = [\{(1,1)\}] \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

3) ومنه : f ليس متباينة.

$: \operatorname{Im} f$ (*)

$f : E \to F$ تطبيق خطي

$\operatorname{Im} f = \{ f(X) \in F, \exists X \in E \} \subset F$

صورة التطبيق الخطي

$= \{ Y \in F, \exists X \in E : Y = f(X) \} \subset F$

$\operatorname{Im} f = F \iff$ غامر f

$\operatorname{Im} f = \{ Y \in \mathbb{R}^2, \exists X \in \mathbb{R}^2 : Y = f(X) \}$

$= \{ Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x', y') = f(x,y) \}$.

نبحث عن الأشعة التي تولد $\operatorname{Im} f$:

$$Y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow Y = (x', y') = f(x,y)$$
$$= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{x}{2}, \frac{-x}{2}\right) + \left(\frac{-y}{2}, \frac{y}{2}\right)$$
$$= \frac{x}{2}(1,-1) - \frac{y}{2}(1,-1)$$
$$= \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)}_{\text{عدد حقيقي}} \underbrace{(1,-1)}_{v}$$

اذن: $(1,-1)$ يولد $\operatorname{Im} f$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل أساس لـ $\operatorname{Im} f = [\{ \overset{v}{(1,-1)} \}]$

و $\dim \operatorname{Im} f = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subset F = \mathbb{R}^2 \\ \dim \operatorname{Im} f = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f \neq \overset{F}{\mathbb{R}^2}$$

ومنه: f ليس غامر

(4) $: \operatorname{rg} f$ (*)

رتبة تطبيق خطي $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$.

$\circledast$ $\underline{\mathrm{Ker}g}$:

$$\mathrm{Ker}g = \{X \in \mathbb{R}^2 : g(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$
$$= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = (0,0)\}.$$

$$g(x,y) = (0,0) \Rightarrow (2x-y, x-y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 & \cdots (1) \\ x - y = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = y.$

$(1) \Rightarrow 2x - x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow y = 0.$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$

ومنه : g متباينة .

$\circledast$ $\underline{\mathrm{Im}g}$:

$$\mathrm{Im}g = \{Y \in \mathbb{R}^2, \exists X \in \mathbb{R}^2 : Y = g(X)\}.$$
$$= \{Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x', y') = g(x,y)\}.$$

$$Y \in \mathrm{Im}g \Rightarrow Y = (x', y') = g(x,y)$$
$$= (2x - y, x - y)$$
$$= (2x, x) + (-y, -y)$$
$$= \underbrace{x}_{\text{عدد حقيقي}} \underbrace{(2,1)}_{v_1} - \underbrace{y}_{\text{عدد حقيقي}} \underbrace{(1,1)}_{v_2}.$$

اذن : $(2,1)$، $(1,1)$ يولدان $\mathrm{Im}g$ أي : $\mathrm{Im}g = [\{(2,1),(1,1)\}]$

ندرس الاستقلال الخطي لهما : ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث :

5 $\alpha(2,1) + \beta(1,1) = (0,0) \Rightarrow (2\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 & \cdots (1) \\ \alpha + \beta = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \alpha = -\beta$.

$(1) \Rightarrow 2(-\beta) + \beta = 0 \Rightarrow -\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

ومنه: $(2,1)$،$(1,1)$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساسا لـ Img.

$$\dim Img = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} Img \subset F = \mathbb{R}^2 \\ \dim Img = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow Imf = \overset{F}{\mathbb{R}^2}$$

ومنه: g غامر.

⊛ $rg\, g$:

$$rg\, g = \dim Imf = 2$$

4) هل $\mathbb{R}^2 = Kerf \oplus Imf$ ؟

جمع مباشر

$$\mathbb{R}^2 = Kerf \oplus Imf \iff \begin{cases} ① \ \mathbb{R}^2 = Kerf + Imf \ . \ ? \\ ② \ Kerf \cap Imf = \{0_{\mathbb{R}^2}\} . \ ? \end{cases}$$

① $Kerf \cap Imf = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$?

لدينا: $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \subset (Kerf \cap Imf)$.

$$(Kerf \cap Imf) \subset \{0_{\mathbb{R}^2}\} \ ?$$

ليكن

$X \in (Kerf \cap Imf)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \in Kerf \\ \wedge \\ X \in Imf \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} : X = \alpha(1,1) \\ \wedge \\ \exists \beta \in \mathbb{R} : X = \beta(1,-1) \end{cases}$$

6 $\Rightarrow X = (x,y) = (\alpha, \alpha) = (\beta, -\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \ —(1) \\ \alpha = -\beta \ —(2) \end{cases} \qquad (1)+(2) \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow X = (x,y) = (0,0)$$

$\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. : اذن

② $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$?

$(\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f) \subset \mathbb{R}^2$: لدينا

$$\dim(\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f) = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f - \dim(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f)$$

$$= 1 + 1 - 0$$

$$= 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$: ومنه

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$: وبالتالي

5) نبين أنه : إذا كان $x \in \mathrm{Im}f$ فإن : $f(x) = x$

$$x \in \mathrm{Im}f = [\{(1,-1)\}] \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha(1,-1) = (\alpha, -\alpha)$$

$$f(x) = f(\alpha, -\alpha) = \left(\frac{\alpha-(-\alpha)}{2}, \frac{-\alpha-\alpha}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2\alpha}{2}, \frac{-2\alpha}{2}\right) = (\alpha, -\alpha) = x.$$