التمرين 01: 1) ليكن $\mathbb{R}^4$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، وليكن الشعاعان $X = (1,2,3,0)$ ، $Y = (0,-1,2,-2)$

أ- أكتب الشعاع $Z = (3,7,7,2)$ كعبارة خطية لـ X و Y.

ب- أوجد العددين x و y بحيث: $U = (2,1,x,y) \in [\{X,Y\}]$، $V = (-2,x,y,-2) \in [\{X,Y\}]$

2) لتكن $V_1 = (2,-1,4)$ ، $V_2 = (1,1,0)$ ، $V_3 = (4,1,4)$ ثلاثة أشعة من $\mathbb{R}^3$

أ- بين أن هذه الأشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى.

ب- هل الجملة $\{V_1, V_2, V_3\}$ مستقلة خطيا؟

التمرين: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ ولتكن $u_1 = (1,0,1)$، $u_2 = (0,1,0)$، $u_3 = (0,2,1)$، $u_4 = (1,-3,0)$

1) هل الجملة $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ مستقلة خطيا؟

2) أوجد m حيث $v = (1,m,1) \in [\{u_3, u_4\}]$.

3) أثبت أن الجملة $\{u_1, u_2, u_3\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

4) نعتبر في $\mathbb{R}^3$ المجموعة G المعرفة بـ $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$

أ- بين أن G فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

ب- هل $v \in G$؟

5) إذا كان $F = [\{u_3, u_4\}]$ و $G = [\{u_1, u_2\}]$

علما أن $\dim(F+G) = 3$، احسب $\dim(F \cap G)$ ثم اختر أساسا لـ $(F \cap G)$.

6) هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

التمرين 02: لتكن الأشعة: $u_1 = (1,1,1)$، $u_2 = (2,-2,-1)$، $u_3 = (1,1,-1)$

ولتكن $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y + z = 0\}$ و $F = [\{u_1, u_2\}]$

1) بين أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$. أوجد أساسا لـ E.

2) هل الجملة $\{u_1, u_2, u_3\}$ مستقلة خطيا؟ هل $u_3 \in F$؟

3) هل $u_3 \in E$؟

4) أعط أساسا لـ $(E \cap F)$.

5) ليكن $u_4 = (-1,7,5)$، هل $u_4 \in E$؟ هل $u_4 \in F$؟

6) هل $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$ ؟

التمرين 03: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، وليكن الفضاءان الشعاعيان الجزئيان:

$F = [\{(0,0,1), (1,1,1)\}]$ ، $G = [\{(1,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}]$

1) أوجد أساسا لكل من: $F, G, F+G, F \cap G$

2) هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

التمرين 04: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ولتكن الأشعة: $a = (0,1,1)$، $b = (0,1,-1)$، $c = (2,3,4)$، $d = (0,1,2)$

1- أثبت أن الجملة $\{a,b,c\}$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$، ثم اكتب d في هذا الأساس.

2- إذا كان $F = [\{a,b\}]$ و $G = [\{c,d\}]$

احسب $\dim(F+G)$، $\dim(F \cap G)$ ثم اختر أساسا لـ $(F \cap G)$.