جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 02

استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

<u>التمرين 04</u>: $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G = [\{(1,1,0)\,,(0,0,1)\,,(1,1,1)\}]$
ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ 2\,x + y - z = 0\}$

1- بين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

2- أوجد أساسا لكل من: $F \cap G, F + G, G, F$ (إن وجد)، محددا أبعادها.

3- هل $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ ؟

التمرين 04: $\mathbb{R}^3$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$.

ليكن ف.ش.ج $G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$

ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}.$$

1) نبين أن: F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$:

نعلم أن شروط ف.ش.ج هي:

F ف.ش.ج من E اذا تحقق:

① $\emptyset\neq F\subset E$

② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall X,Y\in F: (\alpha X+\beta Y)\in F$

① ⊛ $F\subset\mathbb{R}^3$ (من تعريف المجموعة F).

⊛ العنصر الحيادي لـ $\mathbb{R}^3$ $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/2.0+0-0=0$

$\Rightarrow(0,0,0)\in F \Rightarrow F\neq\emptyset$

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، $X,Y\in F$

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x+y-z=0.$

$Y\in F\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/2x'+y'-z'=0.$

$(\alpha X+\beta Y)\in F$??

$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$

$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$

(لكي يكون العنصر $(\alpha X+\beta Y)\in F$ يجب أن يحقق شروط المجموعة F)

③ $2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')$

$=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'$

$=\alpha\underbrace{(2x+y-z)}_{0}+\beta\underbrace{(2x'+y'-z')}_{0}$

$=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$

$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F$ ومنه: F فضاء ش.ج من $\mathbb{R}^3$

ج) إيجاد أساسا لكل من (محدد الابعاد) :

تذكير أن : نسمي أساسا لفضاء شعاعي كل مجموعة مولدة لهذا الفضاء ومستقلة خطيا.

وبعد فضاء شعاعي هو عدد عناصر أساس هذا الفضاء. (dim E)

⊛ $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$.

لكي نجد أساسا ل ف.ش.ج F يجب أن نجد مجموعة مولدة ل F ومستقلة خطيا.

$\Rightarrow F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y=z\}$.

نلاحظ أن : عناصر المجموعة (ف.ش.ج) F هي ثلاثيات من $\mathbb{R}^3$ بحيث: 2.(المركبة 1)+(المركبة 2)=المركبة 3

إذن : كل عنصر من F هو $X=(x,y,z)$

$X\in F \Rightarrow X=(x,y,z)$

$=(x,y,2x+y)$ نكتب هذه الثلاثية إلى مجموع ثلاثيتين أحدهما بدلالة x والثانية بدلالة y

$=(x,0,2x)+(0,y,y)$

$=x\underbrace{(1,0,2)}_{u_1}+y\underbrace{(0,1,1)}_{u_2}$

x عدد حقيقي ، y عدد حقيقي

وجدنا كل عنصر X من F يكتب من الشكل :

عدد حقيقي (x) في شعاع u_1 + عدد حقيقي (y) في شعاع u_2

إذن : u_1 ، u_2 يولدان F.

وجدنا جملة $\{u_1,u_2\}$ تولد F ، ندرس استقلالها الخطي :

ليكن $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ بحيث : $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=0,\ \beta=0.$$

اذن : u_1, u_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا لـ F .

أي : الجملة $\{u_1,u_2\}$ أساس لـ F و $\dim F = 2$

ملاحظة : لاحظ أنه من تعريف المجموعة F

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y=z\}$$

استخدمنا كتابة z بدلالة x و y ، $(z=2x+y)$

يمكننا أيضا استخدام كتابة y بدلالة x و z $(y=z-2x)$

أو كتابة ~~x~~ بدلالة y و z $(x=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}y)$

وفي كل حالة يمكننا ايجاد أساسا آخر لـ F .

مع العلم أن كل فضاء شعاعي له أساسا قانونيا واحد وعدة أسس (كل جملة مولدة و مستقلة فهي تشكل أساسا) .

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ هو : $\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

لأن : كل عنصر من $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=x\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}+y\underbrace{(0,1,0)}_{e_2}+z\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$$

مثلا :

5 $(2,3,4)=2e_1+3e_2+4e_3$

⊛ $G=\left[\left\{\underbrace{(1,1,0)}_{v_1},\underbrace{(0,0,1)}_{v_2},\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}\right\}\right]$

بالنسبة ل ف.ش.ج G فهو مولد ب v_1 ، v_2 ، v_3.

أي $\{v_1,v_2,v_3\}$ تولد G ، اذن بقي دراسة الاستقلال الخطي ل v_1 ، v_2 ، v_3.

نلاحظ أن: $v_1+v_2=v_3$ أي الجملة مرتبطة خطيا

اذن: ندرس الاستقلال الخطي ل v_1 ، v_2.

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow \alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha,\alpha,\beta)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$$

اذن: v_1 ، v_2 مستقلان خطيا فهما يشكلان أساسا ل G.

أي: $\{v_1,v_2\}$ أساس ل G و $\dim G=2$.

⊛ $F+G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X=X_1+X_2 \ ,\ X_1\in F \wedge X_2\in G\}$

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}:$
$X=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3\}$

$(v_1+v_2=v_3)$

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}:$
$X=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3(v_1+v_2)\}$

(ونلاحظ أيضا: $u_1=v_1+3v_2-u_2$)

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}:$
$X=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+(\beta_1+\beta_3)v_1+(\beta_2+\beta_3)v_2\}$

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}:$
$X=\alpha_1(v_1+3v_2-u_2)+\alpha_2 u_2+(\beta_1+\beta_3)v_1+(\beta_2+\beta_3)v_2\}$

$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}:$
$X=(-\alpha_1+\alpha_2)u_2+(\alpha_1+\beta_1+\beta_3)v_1+(3\alpha_1+\beta_2+\beta_3)v_2\}$

$$\Rightarrow F+G=[\{u_2, v_1, v_2\}]$$

أو نستطيع الكتابة مباشرة :

$$F+G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X = X_1+X_2 ,\ X_1\in F \wedge X_2\in G\}$$

أي نأخذ عناصر F و G

$$\Rightarrow \quad = [\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}]$$

نلاحظ أن : $v_1+v_2=v_3$ و $u_1=v_1+3v_2-u_2$

$$\Rightarrow F+G=[\{u_2, v_1, v_2\}]$$

اذن : u_2 ، v_1 ، v_2 تولد $(F+G)$ ، ندرس الاستقلال الخطي لها

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma u_2=0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha, \alpha+\gamma, \beta+\gamma)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha+\gamma=0 & \Rightarrow \gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 & \Rightarrow \beta=0 \end{cases}$$

اذن : v_1 ، v_2 ، u_2 مستقلة خطيا ومنه تشكل أساس لـ $(F+G)$

أي : $\{v_1, v_2, u_2\}$ أساس لـ $(F+G)$ و $\dim(F+G)=3$

$$* \quad F\cap G=\{X\in\mathbb{R}^3 / X\in F \wedge X\in G\}.$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} : X=\alpha u_1+\beta u_2 \wedge \exists \alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha' v_1+\beta' v_2\}.$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=\alpha'(1,1,0)+\beta'(0,0,1)\}.$$

7

$$=\{X\in\mathbb{R}^3 / \exists \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R} : X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',\beta')\}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\alpha' \\ \beta=\alpha' \\ 2\alpha+\beta=\beta' \end{cases}$$

$\Rightarrow X=(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\alpha',\alpha',2\alpha'+\alpha')=(\alpha',\alpha',3\alpha')=\alpha'(1,1,3)$

وجدنا كل X من التقاطع $(F\cap G)$ يكتب من الشكل عدد حقيقي α في شعاع

أي :

$\Rightarrow F\cap G=[\{(1,1,3)\}]$

اذن : $V=(1,1,3)$ يولد $(F\cap G)$ وهو مستقل خطيا فهو يشكل

أساسا لـ $(F\cap G)$ و $\dim(F\cap G)=1$.

3) هل $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ ؟؟

E ف.ش على $\mathbb{K}$، F، G ف.ش.ج من E

يكون $E=F\oplus G$
جمع مباشر

$\left.\begin{array}{l} E=F+G \quad ① \\ F\cap G=\{0_E\} \quad ② \end{array}\right\}$ اذا تحقق

* لاثبات : $E=F+G$ نثبت ان : $E\subset F+G$

و $F+G\subset E$

أو يمكن اثبات أحد الاحتواء بين

$\dim E=\dim(F+G)$ مع

* نفس الشيء بالنسبة لـ $F\cap G=\{0_E\}$

حيث : 0_E هو العنصر الحيادي لـ E بالنسبة للعملية الأولى $(+)$

لدينا من السؤال السابق :

$F\cap G=[\{(1,1,3)\}]\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

ومنه : $\mathbb{R}^3\neq F\oplus G$.