جامعة محمد خيضر

قسم الرياضيات

2020/03/11

الاسم واللقب:.............................

الفوج:.....

السنة الأولى MI

المقياس: جبر 2

تصحيح فرض رقم 01

تمرين01: 1) هل $(\mathbb{R}^3,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ في الحالة التالية:

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',0,0);$$
$$\alpha.(x,y,z)=(x,\alpha y,-\alpha z)$$

2) هل المجموعتين التاليتين تشكلان فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$؟

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ e^x e^y=0\},\qquad F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 3x+y-2z=0\}$$

تمرين02: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. وليكن $U=(1,-1,2)$. $V=(-3,1,1)$

1) أوجد العدد الحقيقي k بحيث يكون الشعاع $X=(-1,k,5)$ عبارة خطية للشعاعين U و V.

2) أوجد الشرط اللازم لـ a, b, c حتى يكون الشعاع $Y=(a,b,c)$ عبارة خطية لـ U و V.

3) هل الجملة $\{(1,2,3)\ ,\ (3,1,2)\ ,\ (4,3,5)\}$ مستقلة خطيا؟

تمرين 01: 4/4

1) لدينا:

$\forall X\in\mathbb{R}^3:\ 1_{\mathbb{R}}.X=1.(x,y,z)$ 1

$=(x,1.y,-1.z)$

$=(x,y,-z)\neq(x,y,z)\neq X$

ومنه: $(\mathbb{R}^3,+,.)$ ليس فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

2) دراسة هل المجموعات F و G ف ش ج من $\mathbb{R}^3$:

* $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/3x+y-2z=0\}$.

① $F\subset\mathbb{R}^3$ (من تعريف F).

* $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/3.0+0-2.0=0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in F\Rightarrow F\neq\emptyset$

② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in F:\ (\alpha X+\beta Y)\in F$?

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ، $X,Y\in F$

$X\in F\Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/3x+y-2z=0$ 2

$Y\in F\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/3x'+y'-2z'=0$

$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$

$=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)+(\beta x',\beta y',\beta z')$

$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$

$3(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')-2(\alpha z+\beta z')$

$=\alpha\underbrace{(3x+y-2z)}+\beta\underbrace{(3x'+y'-2z')}$

$=\alpha.0+\beta.0=0$

$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F$

ومنه: F ف ش ج من $\mathbb{R}^3$.

* $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/e^x e^y=0\}$.

$0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/e^0e^0=1\neq0$. 1

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\notin G$

ومنه: G ليس ف ش ج من $\mathbb{R}^3$.

تمرين 02: 3/3

$V=(-3,1,1)$ ، $U=(1,-1,2)$ ، ف ش على $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}^3$

1) ايجاد k:

$X=(-1,k,5)$ عبارة خطية لـ U و V إذا:

$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ X=\alpha U+\beta V$

$\Rightarrow(-1,k,5)=\alpha(1,-1,2)+\beta(-3,1,1)$

$=(\alpha-3\beta,-\alpha+\beta,2\alpha+\beta)$ 1

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-3\beta=-1 & \text{①}\\ -\alpha+\beta=k & \text{②}\\ 2\alpha+\beta=5 & \text{③}\end{cases}$$

③ $\Rightarrow\beta=5-2\alpha$.

① $\Rightarrow\alpha-3(5-2\alpha)=-1$

$\Rightarrow\alpha-15+6\alpha=-1$

$\Rightarrow 7\alpha=14\Rightarrow\alpha=\frac{14}{7}\Rightarrow\alpha=2$

$\beta=5-2\alpha=5-2.2=5-4=1$

$\Rightarrow\beta=1$

② $\Rightarrow k=-2+1=-1\Rightarrow k=-1$

2) ايجاد الشرط اللازم لـ a، b، c حتى يكون $Y=(a,b,c)$ عبارة خطية لـ U و V:

$Y=(a,b,c)$ عبارة خطية لـ U و V إذا:

$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ Y=\alpha U+\beta V$

$\Rightarrow(a,b,c)=\alpha(1,-1,2)+\beta(-3,1,1)$

$=(\alpha-3\beta,-\alpha+\beta,2\alpha+\beta)$ 1

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-3\beta=a & (1)\\ -\alpha+\beta=b & (2)\\ 2\alpha+\beta=c & (3)\end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow a+b=-2\beta\Rightarrow\beta=\frac{a+b}{-2}$

$(2)-(3) \Rightarrow b-c=-3\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{b-c}{-3}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{c-b}{3}$

$(1) \Rightarrow a=\frac{c-b}{3}-3\cdot\frac{a+b}{-2}$

$\Rightarrow 6a=2c-2b+9a+9b.$

$\Rightarrow 3a+7b+2c=0.$

3) دراسة استقلال الجملة: $\{(1,2,3),(3,1,2),(4,3,5)\}$

ط1: نلاحظ أن: $(1,2,3)+(3,1,2)=(4,3,5)$

اذن: الجملة مرتبطة خطيا.

1

ط2: ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$\alpha(1,2,3)+\beta(3,1,2)+\gamma(4,3,5)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha+3\beta+4\gamma,\ 2\alpha+\beta+3\gamma,\ 3\alpha+2\beta+5\gamma)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta+4\gamma=0. & \text{①} \\ 2\alpha+\beta+3\gamma=0 & \text{②} \\ 3\alpha+2\beta+5\gamma=0. & \text{③} \end{cases}$$

① $\Rightarrow \alpha=-3\beta-4\gamma.$

② $\Rightarrow 2(-3\beta-4\gamma)+\beta+3\gamma=0.$

$\Rightarrow -6\beta-8\gamma+\beta+3\gamma=0.$

$\Rightarrow -5\beta-5\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-\beta.$

$\alpha=-3\beta-4\gamma=-3\beta-4\cdot(-\beta) \Rightarrow \alpha=\beta.$

③ $\Rightarrow 3\cdot\beta+2\beta+5\cdot(-\beta)=0.$

$\Rightarrow 5\beta-5\beta=0.$

اذن: β لها مجموعة غير منتهية من القيم.

ومنه: الجملة مرتبطة خطيا.