جامعة محمد خيضر بسكرة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات

السنة الأولى MI

مقياس جبر2

2020/2019

السلسلة رقم 02

استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

التمرين 01: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، وليكن $U = (1,-3,2)$. $V = (2,-1,1)$

1) هل كل من الشعاعين $X = (1,7,-4)$. $Y = (2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V.

2) أوجد العدد k بحيث: $W = (1,-1,k) \in [\{U,V\}]$.

تمرين01:

تمرين 1: $\mathbb{R}^3$ ف.ش على $\mathbb{R}$

$U = (1,-3,2)$, $V = (2,-1,1)$

1) $X = (1,7,-4)$ عبارة خطية لـ U و V

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : X = \alpha U + \beta V$

$(1,7,-4) = \alpha(1,-3,2) + \beta(2,-1,1)$

$= (\alpha + 2\beta, -3\alpha - \beta, 2\alpha + \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 & (1) \\ -3\alpha - \beta = 7 & (2) \\ 2\alpha + \beta = -4 & (3) \end{cases}$$

$(2) + (3) \Rightarrow -\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -3$

$(1) \Rightarrow 2\beta = 1 - \alpha \Rightarrow 2\beta = 1 + 3 \Rightarrow \beta = \frac{4}{2} \Rightarrow \beta = 2$

$\Rightarrow \exists \alpha = -3, \beta = 2 \in \mathbb{R} : X = -3U + 2V$

2) $Y = (2,-5,4)$ عبارة خطية لـ U و V

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Y = \alpha U + \beta V$

$\Rightarrow (2,-5,4) = (\alpha + 2\beta, -3\alpha - \beta, 2\alpha + \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 & (1) \\ -3\alpha - \beta = -5 & (2) \\ 2\alpha + \beta = 4 & (3) \end{cases}$$

$(2) + (3) \Rightarrow -\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1$

$(1) \Rightarrow 2\beta = 2 - \alpha \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

نتأكد أن قيم α و β تحقق المعادلات الثلاث:

$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$-3 \cdot 1 - \frac{1}{2} = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{6-1}{2} = \frac{-7}{2} \neq -5$

$2 \cdot 1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \neq 4$

ومنه: الشعاع $Y = (2,-5,4)$ ليس عبارة خطية لـ U و V.

2) إيجاد العدد k بحيث:

$W = (1,-1,k) \in [\{U,V\}]$

$W \in [\{U,V\}] \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : W = \alpha U + \beta V$

$\Rightarrow (1,-1,k) = \alpha(1,-3,2) + \beta(2,-1,1)$

$= (\alpha + 2\beta, -3\alpha - \beta, 2\alpha + \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 & (1) \\ -3\alpha - \beta = -1 & (2) \\ 2\alpha + \beta = k & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \alpha = 1 - 2\beta.$

$(2) \Rightarrow -3(1 - 2\beta) - \beta = -1$

$\Rightarrow -3 + 6\beta - \beta = -1$

$\Rightarrow 5\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \alpha = 1 - 2\beta = 1 - 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{+5-4}{5} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$

$(3) \Rightarrow k = 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow k = \frac{4}{5}$

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 02

استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

التمرين 02:

1) من بين العائلات التالية، ما هي المولدة للفضاء الشعاعي E؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(3,-1),(1,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(-1,1)\ ,(3,-3)\}, \mathcal{F}_3 = \{(3,-1)\ ,(1,1),(1,-2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2\ ,3X,-1\}, \mathcal{F}_2 = \{X^2 + X, X - 1\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1)\ ,(-1,1,0)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,0,-1)\ ,(2,0,3)\ ,(3,1,-1)\}$$

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السلسلة رقم 02

استقلال، ارتباط وتوليد أشعة

التمرين 02:

2) من بين العائلات التالية، ما هي المستقلة خطيا في E ؟

a) $\underline{E = \mathbb{R}^2}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(-1,3)\,,(0,1)\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2)\,,(-1,1),(-1,2)\}$$

b) $\underline{E = \mathbb{P}_2[\mathrm{X}]}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{X^2+1\,,X-2\}, \mathcal{F}_2 = \{X, X+1, X-1\}, \mathcal{F}_3 = \{X^2-1, X^2+1{,}2X\}$$

c) $\underline{E = \mathbb{R}^3}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{(1,1,0)\,,(1,0,1),(0,1,1)\,\}, \mathcal{F}_2 = \{(1,2,3)\,,(3,2,1)\,,(4,4,4)\}$$

d) $\underline{E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$:

$$\mathcal{F}_1 = \{e^x\,,xe^x\}, \mathcal{F}_2 = \{\cos x\ \,,\sin x\}$$

التمرين 02: 1) من بين العائلات التالية، ماهي المولدة للفضاء الشعاعي E :

$\boxed{a)\ E=\mathbb{R}^2}$

$F_1=\{(3,-1),(1,1)\}$

لتكن E ف.ش على $\mathbb{K}$ و $\{e_i\}_{i\in I}\subset E$ عائلة من E
نقول أن $\{e_i\}_{i\in I}$ مولدة لـ E إذا كان كل عنصر $x\in E$
يكتب على شكل عبارة خطية لـ $\{e_i\}_{i\in I}$
$\forall x\in E,\ \exists\{\lambda_i\}_{i\in I}\subset\mathbb{K}:\ x=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$
أي: $[\{e_i\}_{i\in I}]=E$

$F=\{Y,Z\}$ مولدة لـ E
$\Leftarrow\ \forall X\in E,\ \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ X=\alpha Y+\beta Z$

$\forall X\in\mathbb{R}^2,\ \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ X=\alpha(3,-1)+\beta(1,1)$

$\Rightarrow (x,y)=(3\alpha+\beta,-\alpha+\beta)$

$\Rightarrow\begin{cases}x=3\alpha+\beta & \cdots (1)\\ y=-\alpha+\beta & \cdots (2)\end{cases}$

$(1)-(2)\Rightarrow 4\alpha=x-y\Rightarrow\alpha=\dfrac{x-y}{4}$.

$(2)\Rightarrow\beta=y+\alpha=y+\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{4y+x-y}{4}=\dfrac{3y+x}{4}$

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \exists\alpha=\dfrac{x-y}{4},\ \beta=\dfrac{3y+x}{4}\in\mathbb{R}:$

$X=\alpha(3,-1)+\beta(1,1)$

اذن: F_1 تولد $\mathbb{R}^2$.

* $F_2=\{(-1,1),(3,-3)\}$.

$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y)=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)$??

$(x,y)=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)$

$\Rightarrow(x,y)=(-\alpha+3\beta,\alpha-3\beta)$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-\alpha+3\beta\\ y=\alpha-3\beta\end{cases}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x=-y$

نلاحظ أن: ليس جميع الثنائيات (x,y) من $\mathbb{R}^2$ تحقق $x=-y$

اذن: F_2 لا تولد $\mathbb{R}^2$.

طريقة ثانية: نريد معرفة هل F_2 مولد لـ $\mathbb{R}^2$، أي $E=[\{(-1,1),(3,-3)\}]$??

$[\{(-1,1),(3,-3)\}]$
$=\{\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:X=\alpha(-1,1)+\beta(3,-3)\}$.
$=\{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y)=\alpha(-1,1)-3\beta(-1,1)\}$.
$=\{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y)=(\alpha-3\beta)(-1,1)\}$.
$=[\{(-1,1)\}]$.

انطلاقا من النتيجة التالية:

إذا كان E ف.ش ذو بعد n $(\dim E=n)$ فإن:
- كل عائلة مستقلة تحوي على الأكثر n عنصر.
- كل عائلة مولدة تحوي على الأقل n عنصر.

نستنتج أن: F_2 ليست مولدة لـ E لأن:
$\operatorname{card}\{(-1,1)\}=1<\dim E=2$
اذن: $E\neq[\{(-1,1)\}]=[\{(-1,1),(3,-3)\}]$

* $F_3=\{(3,-1),(1,1),(1,-2)\}$.

انطلاقا من النتيجة التالية:

إذا كانت A مولدة لـ E و $A\subset B$ فإن: B مولدة أيضا لـ E.

نستنتج أن: F_3 مولدة لـ E لأن: F_1 مولدة لـ E و $F_1\subset F_3$.

$\boxed{b)\ E=\mathbb{R}_2[X]}$.

$\forall P\in\mathbb{R}_2[X]\Rightarrow P(X)=aX^2+bX+c$.

* $F_1=\{X^2,3X,-1\}$.

$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:P(X)=\alpha(X^2)+\beta(3X)+\gamma(-1)$???

$\Rightarrow aX^2+bX+c=\alpha X^2+3\beta X-\gamma$.

$\Rightarrow\begin{cases}a=\alpha\\ b=3\beta\\ c=-\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=a\\ \beta=\frac{b}{3}\\ \gamma=-c\end{cases}$

اذن: $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\exists\alpha=a,\beta=\frac{b}{3},\gamma=-c\in\mathbb{R}:$

$P(X)=\alpha(X^2)+\beta(3X)+\gamma(-1)$

ومنه: F_1 مولدة لـ E.

* $F_2=\{X^2+X,X-1\}$.

لدينا: $\operatorname{card}F_2=2<\dim E=3$
اذن: F_2 ليست مولدة لـ E.

$\boxed{c)\ E=\mathbb{R}^3}$

* $F_1=\{(1,0,1),(-1,1,0)\}$.

لدينا: $\operatorname{card}F_1=2<\dim E=3$
اذن: F_1 ليست مولدة لـ E.

* $F_2=\{(1,0,-1),(2,0,3),(3,1,-1)\}$

$\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$. ???

$\Rightarrow\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=(\alpha+2\beta+3\gamma,\gamma,-\alpha+3\beta-\gamma)$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta+3\gamma & \cdots (1)\\ y=\gamma & \cdots (2)\\ z=-\alpha+3\beta-\gamma & \cdots (3)\end{cases}$

$(2)\Rightarrow\gamma=y$

$(1)+(3)\Rightarrow x+z=5\beta+2\gamma\Rightarrow5\beta=x+z-2y$.

$\Rightarrow\beta=\dfrac{x+z-2y}{5}$.

$(3)\Rightarrow-\alpha+3\left(\dfrac{x+z-2y}{5}\right)-y=z$

$\Rightarrow-\alpha+\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}y-y=z$

$\Rightarrow\alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y$

اذن: $\forall X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\exists\left(\alpha=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}z-\frac{11}{5}y\right),$
$\left(\beta=\dfrac{x+z-2y}{5}\right),(\gamma=y)\in\mathbb{R}:$

$X=\alpha(1,0,-1)+\beta(2,0,3)+\gamma(3,1,-1)$

ومنه: F_2 مولدة لـ E.

2) من بين العائلات التالية، ماهي المستقلة خطيا:

تعريف: نقول أن العائلة $\{x_i\}_{i\in I}$ أنها مستقلة خطيا إذا تحقق:

$$\forall \{\lambda_i\}_{i\in I}\subset \mathbb{K};\ \sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0_{\mathbb{K}},\ \forall i\in I$$

حيث: $(E,+,.)$ ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.

$\{x_i\}_{i\in I}$ عائلة من الأشعة من E.

$\{\lambda_i\}_{i\in I}$ عائلة من السلميات من $\mathbb{K}$.

a) $E=\mathbb{R}^2$.

- $F_1=\{(-1,3),(0,1)\}$.

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R};\ \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \alpha=\beta=0$???

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha(-1,3)+\beta(0,1)=0_{\mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow (-\alpha, 3\alpha+\beta)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\alpha=0 & \dots ①\\ 3\alpha+\beta=0 & \dots ②\end{cases}$$

$① \Rightarrow \alpha=0$ $\qquad \Rightarrow \alpha=0$ و $\beta=0$

$② \Rightarrow \beta=-3\alpha=0$

إذن: F_1 مستقلة خطيا.

- $F_2=\{(1,2),(-1,1),(-1,2)\}$.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(1,2)+\beta(-1,1)+\gamma(-1,2)=0_{\mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow (\alpha-\beta-\gamma,\ 2\alpha+\beta+2\gamma)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta-\gamma=0 & \dots ①\\ 2\alpha+\beta+2\gamma=0 & \dots ②\end{cases}$$

$①+② \Rightarrow 3\alpha+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-3\alpha$.

$① \Rightarrow \alpha-\beta-(-3\alpha)=0 \Rightarrow -\beta+4\alpha=0 \Rightarrow \beta=4\alpha$

$② \Rightarrow 2\alpha+4\alpha+2(-3\alpha)=0$

$\Rightarrow 6\alpha-6\alpha=0$

إذن: α تأخذ مالانهاية من القيم وبالتالي β و γ أيضا تأخذان مالانهاية من القيم

ومنه: العائلة F_2 ليست مستقلة خطيا

طريقة ثانية: يمكن استعمال النتيجة السابقة:

لدينا: $\operatorname{card} F_2 = 3 > \dim E = 2$

إذن: F_2 ليست مستقلة خطيا.

طريقة ثالثة:

ملاحظة: إذا كانت العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ليست مستقلة خطيا فهي مرتبطة خطيا

ونقول أن العائلة $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$ مرتبطة خطيا إذا تحقق: أن أحد عناصر هذه العائلة هو مزج خطي لبقية العناصر.

نلاحظ أن:

$$(1,2)=-4(-1,1)+3(-1,2)$$

ومنه: F_2 ليست مستقلة خطيا.

b) $E=\mathbb{R}_2[X]$

- $F_1=\{X^2+1,\ X-2\}$.

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha(X^2+1)+\beta(X-2)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=\Theta(X)$

$$\Rightarrow \alpha X^2+\beta X+(\alpha-2\beta)=0_{\mathbb{R}_2[X]}=0.X^2+0.X+0.1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha-2\beta=0\end{cases}$$

ومنه: F_1 مستقلة خطيا.

- $F_2=\{X,\ X+1,\ X-1\}$.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(X)+\beta(X+1)+\gamma(X-1)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)X+(\beta-\gamma)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \dots ①\\ \beta-\gamma=0 & \dots ②\end{cases}$$

$② \Rightarrow \beta=\gamma$.

$① \Rightarrow \alpha+2\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-2\gamma$.

$① \Rightarrow -2\gamma+2\gamma=0 \Rightarrow \gamma-\gamma=0$.

إذن: α,β,γ لها العديد من القيم

ومنه: العائلة F_2 ليست مستقلة خطيا.

بإمكاننا أيضا أن نلاحظ أن:

$$X=\tfrac{1}{2}(X+1)+\tfrac{1}{2}(X-1)$$

- $F_3=\{X^2-1,\ X^2+1,\ 2X\}$.

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha(X^2-1)+\beta(X^2+1)+\gamma(2X)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)X^2+2\gamma X+(\beta-\alpha)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0 & \dots ①\\ 2\gamma=0 & \dots ②\\ \beta-\alpha=0 & \dots ③\end{cases}$$

$② \Rightarrow \gamma=0$.

$①+③ \Rightarrow 2\beta=0 \Rightarrow \beta=0$

$① \Rightarrow \alpha=-\beta \Rightarrow \alpha=0$

ومنه: F_3 مستقلة خطيا.

c) $E=\mathbb{R}^3$

1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}: \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \beta=-\alpha. \quad \Rightarrow \gamma=-\alpha.$$

$\Rightarrow -\alpha-\alpha=0 \Rightarrow -2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$.

$\Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \gamma=0$.

إذن هذه الأشعة مستقلة خطيا.

2) $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 & \text{— (1)} \\ 2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 & \text{— (2)} \\ 3\alpha + \beta + 4\gamma = 0 & \text{— (3)} \end{cases}$

$(1) - (3) \Rightarrow -2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

$(2) \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 4\gamma = 0 \Rightarrow 4\alpha + 4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\alpha$.

$(1) \Rightarrow \alpha + 3 \cdot (\alpha) + 4(-\alpha) = 0 \Rightarrow 4\alpha - 4\alpha = 0$

α تأخذ مالانهاية من القيم.

إذن: v_1، v_2، v_3 ليست مستقلة خطيا.

أو يمكن الملاحظة أن: $v_3 = v_1 + v_2$

$\boxed{d)\ E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

- $\mathcal{F}_1 = \{e^x, xe^x\}$.

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha e^x + \beta x e^x = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha + \beta x) e^x = 0_E(x)$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$e^x \neq 0 \Rightarrow \alpha + \beta x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

ومنه: $\mathcal{F}_1$ مستقلة خطيا.

- $\mathcal{F}_2 = \{\cos x, \sin x\}$.

لتكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cos x + \beta \sin x = 0_E(x)$.

$\Rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x = 0 \quad, \forall x \in \mathbb{R}$

وبالخصوص، من أجل $x = 0$، $x = \frac{\pi}{2}$، يكون لدينا على الترتيب:

$\begin{cases} \alpha \cos 0 + \beta \sin 0 = 0 \\ \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \beta \sin \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

ومنه: $\mathcal{F}_2$ مستقلة خطيا.