التمرين 01: نزود $\mathbb{R}^*$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus:\ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad (x\ ,y) \mapsto x \oplus y = xy$$

$$\otimes:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad (\lambda\ ,\ x) \mapsto \lambda \otimes x = x^{\lambda}$$

بين أن $(\mathbb{R}^*, \oplus, \otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R}, +, .)$.

التمرين 02: في كل حالة من الحالات التالية، هل $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$؟

1) $(x,y) + (x',y') = (x+x', 0);$ $\quad \alpha.(x,y) = (0, \alpha y)$

2) $(x,y) + (x',y') = (y+y', x+x');$ $\quad \alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

3) $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y');$ $\quad \alpha.(x,y) = (x, \alpha y)$

4) $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y');$ $\quad \alpha.(x,y) = (\alpha^2 y, \alpha^2 x)$

5) $(x,y) + (x',y') = \left(\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x'}\right)^3, \left(\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{y'}\right)^5\right);$ $\quad \alpha.(x,y) = (\alpha^3 x, \alpha^5 y)$

التمرين 03: ليكن $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، من بين المجموعات التالية ما هي التي تمثل فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$:

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = z \wedge y = 0\}$; $\quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 0 \ \vee y = 0\}$; $\quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 7z - 3y = x\}$

$E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ e^x e^y = 0\}$; $\quad E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x(\ y^2 + z^2) = 0\}$

$E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x,y \in \mathbb{R} \wedge z = 1\}$; $\quad E_8 = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3 / \ a,b \in \mathbb{R}\}$

التمرين 04: **1)** ليكن $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي، من بين المجموعات التالية ما هي التي تشكل فضاء شعاعيا جزئيا من E؟

1) $I = \{f \in E / \text{فردية } f\}$ $\quad$ 2) $P = \{f \in E / \text{زوجية } f\}$

3) $T = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}: f(x+1) = f(x)\}$ $\quad$ 4) $C = \{f \in E / \text{ متزايدة } f\}$

2) نضع: $\Delta = \{f - g / \ f,g \in C\}$

- بين أن Δ فضاء شعاعي جزئي من E.

3) من أجل كل دالة $f \in E$، نضع: $\quad f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ، $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

أ- إلى أي الفضاءين I أو P ينتمي f_1 و f_2.

ب- بين أن: $E = P \oplus I$.