جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 01

الفضاءات الشعاعية والفضاءات الشعاعية الجزئية

<u>التمرين 04</u>: في كل حالة من الحالات التالية، تحقق إن كانت المجموعات الجزئية F_i تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E.

الفضاء الشعاعي E	المجموعات الجزئية F_i
$E=\mathbb{R}^2$	$F_1=\{(x,y)\in E/\ 2x+y=0\}$ $F_2=\{(x,y)\in E/\ x+y=1\}$ $F_3=\{(x,y)\in E/\ x^2-y=0\}$
$E=\mathbb{R}^3$	$F_4=\{(x,y,z)\in E/\ 2x-y+z=0\}$ $F_5=\{(x,y,z)\in E/\ e^x e^z=0\}$ $F_6=\{(x,y,z)\in E/\ y(\ x^2+z^2)=0\}$
$E=\mathbb{P}_1[\mathrm{X}]$	$F_7=\{P\in E, P'(0)=2\}$ $F_8=\{P\in E, P(1)=P'(1)\}$ $F_9=\{P\in E, P(0)=P(2)\}$
$E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$	$F_{10}=\left\{f\in E/ f \text{ فردية}\right\}$ $F_{11}=\left\{f\in E/\ f \text{ متزايدة}\right\}$ $F_{12}=\{f\in E/\forall x\in\mathbb{R}{:}\ f(x+1)=f(x)\}$

التمرين 04 : في كل حالة من الحالات التالية، نتحقق إن كانت المجموعات الجزئية F تشكل فضاءا شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E :

E ف.ش. على الحقل $\mathbb{K}$ ، يكون F ف.ش. جزئي من E إذا تحقق :

① $\emptyset \neq F \subset E$. $(0_E \in F)$

② $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall x,y \in F : (\alpha x+\beta y) \in F$

أو

E ف.ش. على الحقل $\mathbb{K}$ ، يكون F ف.ش. جزئي من E إذا تحقق :

① $\emptyset \neq F \subset E$. $(0_E \in F)$

② * $\forall x,y \in F : (x+y) \in F$

* $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F : (\alpha x) \in F$

* $E=\mathbb{R}^3$.

4) $F_4=\{(x,y,z)\in E / 2x-y+z=0\}$.

① * $F_4\subset E$ (من تعريف المجموعة F_4).

* $0_E=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3 / 2\cdot0-0+0=0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in F_4 \Rightarrow F_4\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $X,Y\in F_4$

$X\in F_4 \Rightarrow X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/2x-y+z=0$.

$Y\in F_4\Rightarrow Y=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/2x'-y'+z'=0$.

$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$

$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha z+\beta z'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^3$

$2(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')$

$=2\alpha x+2\beta x'-\alpha y-\beta y'+\alpha z+\beta z'$

$=\alpha\underbrace{(2x-y+z)}+\beta\underbrace{(2x'-y'+z')}$

$=\alpha\cdot\ 0\ +\beta\cdot\ 0$

$=0$

$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F_4$

ومنه: F_4 ف.ش.ج من E.

5) $F_5=\{(x,y,z)\in E / e^x e^y=0\}$.

F_5 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3/e^0.e^0=1\neq0$.

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\notin F_5$

6) $F_6=\{(x,y,z)\in E/y(x^2+z^2)=0\}$.

F_6 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists X=(0,1,0)\in F_6$ $((0,1,0)\in\mathbb{R}^3/1\cdot(0^2+0^2)=0)$

$\exists Y=(1,0,1)\in F_6$ $((1,0,1)\in\mathbb{R}^3/0\cdot(1^2+1^2)=0)$

لكن: $X+Y=(0,1,0)+(1,0,1)=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3/$

$1\cdot(1^2+1^2)=1\neq0$

$\Rightarrow(1,1,1)\notin F_6$

أي: $(X+Y)\notin F_6$.

* $E=\mathbb{R}^2$

1) $F_1=\{(x,y)\in E/2x+y=0\}$.

① * ليكن $(x,y)\in F_1\Rightarrow(x,y)\in E/2x+y=0$

$\Rightarrow F_1\subset E$

* $0_E=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in\mathbb{R}^2: 2\cdot0+0=0$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}\in F_1 \Rightarrow F_1\neq\emptyset$

② $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall X,Y\in F_1: (\alpha X+\beta Y)\in F_1$??

ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $X,Y\in F_1$

$X\in F_1\Rightarrow X=(x,y)\in\mathbb{R}^2: 2x+y=0$.

$Y\in F_1\Rightarrow Y=(x',y')\in\mathbb{R}^2: 2x'+y'=0$

$\alpha X+\beta Y=\alpha(x,y)+\beta(x',y')$

$=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x',\beta y')$

$=(\underbrace{\alpha x+\beta x'}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\alpha y+\beta y'}_{\in\mathbb{R}})\in\mathbb{R}^2$

لكي يكون $(\alpha X+\beta Y)\in F_1$ يجب أن يكون:

$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=0$??

$2(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')$

$=2\alpha x+2\beta x'+\alpha y+\beta y'$

$=\alpha\underbrace{(2x+y)}+\beta\underbrace{(2x'+y')}$

$=\alpha\cdot\ 0\ +\beta\cdot\ 0$

$=0$

$\Rightarrow(\alpha X+\beta Y)\in F_1$

ومنه: F_1 ف.ش.ج. من E.

2) $F_2=\{(x,y)\in E/x+y=1\}$.

F_2 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E=0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in\mathbb{R}^2/0+0\neq1$

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^2}\notin F_2$

3)

$F_3=\{(x,y)\in E/x^2-y=0\}$.

F_3 ليس ف.ش.ج من E مثال مضاد:

$\exists X=(1,1)\in F_3$ $((1,1)\in\mathbb{R}^2/1^2-1=0$:لأن$)$

$\exists Y=(-1,1)\in F_3$ $((-1,1)\in\mathbb{R}^2/(-1)^2-1=0$:لأن$)$

لكن: $X+Y=(1,1)+(-1,1)=(1-1,1+1)=(0,2)$:

$(0,2)\in\mathbb{R}^2/0^2-2=-2\neq0$

$\Rightarrow(0,2)\notin F_3$

أي: $(X+Y)\notin F_3$

* $E=\mathbb{R}_1[X]$

7) $F_7=\{P\in E / P'(0)=2\}$

F_7 ليس ف.ش.ج من E لأن:

$0_E=0_{\mathbb{R}_1[X]}=\Theta(X)=0.X+0\in\mathbb{R}_1[X] / \Theta'(0)=0\neq 2$ كثير الحدود المعدوم

$\Rightarrow 0_{\mathbb{R}_1[X]}\notin F_7$.

8) $F_8=\{P\in E / P(1)=P'(1)\}$.

① * $F_8\subset E$ (من تعريف المجموعة F_8).

* $0_E=0_{\mathbb{R}_1[X]}=\Theta(X)=0.X+0\in\mathbb{R}_1[X]/$

$\Theta(1)=0\ ,\ \Theta'(1)=0$

أي: $\Theta(1)=\Theta'(1)$

$\Rightarrow\Theta(X)\in F_8\Rightarrow F_8\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ ,\ P,Q\in F_8$

$P\in F_8\Rightarrow P\in E / P(1)=P'(1)$

$Q\in F_8\Rightarrow Q\in E / Q(1)=Q'(1)$

$(\alpha P+\beta Q)\in E/$ (لأن: مجموع كثيري حدود هو كثير حدود وجداء عدد حقيقي في كثير حدود هو كثير حدود)

$(\alpha P+\beta Q)(1)=(\alpha P)(1)+(\beta Q)(1)$

$=\alpha.P(1)+\beta.Q(1)$

$=\alpha.P'(1)+\beta.Q'(1)$

$=(\alpha P)'(1)+(\beta Q)'(1)$

$=(\alpha P+\beta Q)'(1)$

$\Rightarrow(\alpha P+\beta Q)\in F_8$

ومنه: F_8 ف.ش.ج من E.

9) $F_9=\{P\in E / P(0)=P(2)\}$.

بنفس طريقة اثبات الحالة (8) نجد أن: F_9 كذلك ف.ش.ج من E.

* $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

10) $F_{10}=\{f\in E / f$ فردية $\}$.

$=\{f\in E, x\in\mathbb{R} / f(-x)=-f(x)\}$.

① * $F_{10}\subset E$ (من تعريف المجموعة F_{10})

* $0_E=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}=O(x)$ الدالة المعدومة

$O(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto O(x)=0$.

$O(x)\in E / O(-x)=0$

$O(x)=0\Rightarrow -O(x)=0$

$\Rightarrow O(-x)=-O(x)=0$.

$\Rightarrow O(x)\in F_{10}\Rightarrow F_{10}\neq\emptyset$.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ f,g\in F_{10}$

$f\in F_{10}\Rightarrow f\in E / f(-x)=-f(x)$

$g\in F_{10}\Rightarrow g\in E / g(-x)=-f(x)$

$(\alpha f+\beta g)\in E/$

$(\alpha f+\beta g)(-x)=(\alpha f)(-x)+(\beta g)(-x)$

$=\alpha.f(-x)+\beta.g(-x)$

$=-\alpha f(x)-\beta g(x)$

$=-(\alpha f(x)+\beta g(x))$

$=-((\alpha f)(x)+(\beta g)(x))$

$=-(\alpha f+\beta g)(x)$

$\Rightarrow(\alpha f+\beta g)\in F_{10}$

ومنه: F_{10} ف.ش.ج من E.

11) $F_{11}=\{f\in E / f$ متزايدة $\}$.

F_{11} ليس ف.ش.ج من E لأن جداء دالة متزايدة بعدد حقيقي سالب ليس دالة متزايدة.

12) $F_{12}=\{f\in E / \forall x\in\mathbb{R}: f(x+1)=f(x)\}$.

بنفس طريقة اثبات الحالة (10) نجد أن: F_{12} كذلك ف.ش.ج من E.