جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 01

الفضاءات الشعاعية والفضاءات الشعاعية الجزئية

التمرين 01: نزود $E = \mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus:\ E \times E \to E \qquad (x\ ,y) \mapsto x \oplus y = x + y + 1$$

$$\otimes:\ \mathbb{R} \times E \to E \qquad (\alpha\ ,\ x) \mapsto \alpha \otimes x = \alpha x + \alpha - 1$$

بين أن $(E, \oplus, \otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R}, +, .)$.

جامعة محمد خيضر بسكرة
ث.ع.د.ع.ب 2
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر 2
2020 / 2019

السلسلة 01

الفضاءات الشعاعية والفضاءات الشعاعية الجزئية

التمرين 01: نزود $E=\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $\oplus$ وقانون تركيب خارجي $\otimes$ بالشكل التالي:

$$\oplus : E\times E \longrightarrow E,\quad (x,y)\longmapsto x\oplus y = x+y+1$$

$$\otimes : \mathbb{R}\times E \longrightarrow E,\quad (\alpha,x)\longmapsto \alpha\otimes x = \alpha x+\alpha-1$$

نبين أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{R},+,\cdot)$:

نقول أن $(E,\oplus,\otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(\mathbb{K},+,\cdot)$ إذا تحقق:

① $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية:
- $\oplus$ تجميعية
- $\oplus$ تقبل عنصر حيادي
- لكل عنصر نظير بالنسبة لـ $\oplus$
- $\oplus$ تبديلية.

② $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall X,Y\in E$:

ⓐ $\alpha\otimes(X\oplus Y)=(\alpha\otimes X)\oplus(\alpha\otimes Y)$

ⓑ $(\alpha+\beta)\otimes X=(\alpha\otimes X)\oplus(\beta\otimes X)$

ⓒ $(\alpha\cdot\beta)\otimes X=\alpha\otimes(\beta\otimes X)$

ⓓ $1_{\mathbb{K}}\otimes X=X$

① $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية:

$\oplus$ تجميعية: $\forall x,y,z\in E:\ (x\oplus y)\oplus z \overset{?}{=} x\oplus(y\oplus z)$

ليكن $x,y,z\in E$

$$(x\oplus y)\oplus z=(x+y+1)\oplus z$$
$$=(x+y+1)+z+1$$
$$=x+y+z+2 \quad \dots (1)$$

$$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus(y+z+1)$$
$$=x+(y+z+1)+1$$
$$=x+y+z+2 \quad \dots (2)$$

إذن: $\oplus$ تجميعية. $(1)=(2)$

$\oplus$ تبديلية: $\forall x,y\in E:\ x\oplus y \overset{?}{=} y\oplus x$

ليكن $x,y\in E$:

$$x\oplus y=x+y+1 \quad \dots (1)$$
$$y\oplus x=y+x+1 \quad \dots (2)$$

$(1)=(2)$ لأن الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$.

إذن: $\oplus$ تبديلية.

العنصر الحيادي:

$$\exists e\in E,\ \forall x\in E:\ x\oplus e=e\oplus x=x$$

بما أن $\oplus$ تبديلية فإنه يكفي أخذ معادلة واحدة:

$$x\oplus e=x \Rightarrow x+e+1=x$$
$$\Rightarrow e=-1\in E$$

إذن: العنصر الحيادي هو: $e=-1$.

العنصر النظير:

$$\forall x\in E,\ \exists \grave{x}\in E:\ x\oplus\grave{x}=\grave{x}\oplus x=e$$

بما أن $\oplus$ تبديلية فإنه يكفي أخذ معادلة واحدة:

$$x\oplus\grave{x}=e \Rightarrow x+\grave{x}+1=-1$$
$$\Rightarrow \grave{x}=-x-2\in E.$$

إذن: العنصر النظير هو: $\grave{x}=-x-2$

ومنه: $(E,\oplus)$ زمرة تبديلية.

② ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in E$

ⓐ $\alpha\otimes(x\oplus y)\overset{?}{=}(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$

$$\alpha\otimes(x\oplus y)=\alpha\otimes(x+y+1)$$
$$=\alpha(x+y+1)+\alpha-1$$
$$=\alpha x+\alpha y+2\alpha-1 \quad \dots (1)$$

$$(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)=(\alpha x+\alpha-1)\oplus(\alpha y+\alpha-1)$$
$$=(\alpha x+\alpha-1)+(\alpha y+\alpha-1)+1$$
$$=\alpha x+\alpha y+2\alpha-1 \quad \dots (2)$$

إذن: الشرط ⓐ محقق. $(1)=(2)$

ⓑ $(\alpha+\beta)\otimes x\overset{?}{=}(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$

$$(\alpha+\beta)\otimes x=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)-1$$
$$=\alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \quad \dots (1)$$

$$(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)=(\alpha x+\alpha-1)\oplus(\beta x+\beta-1)$$
$$=(\alpha x+\alpha-1)+(\beta x+\beta-1)+1$$
$$=\alpha x+\beta x+\alpha+\beta-1 \quad \dots (2)$$

إذن: الشرط ⓑ محقق. $(1)=(2)$

ⓒ $(\alpha\cdot\beta)\otimes x\overset{?}{=}\alpha\otimes(\beta\otimes x)$

$$(\alpha\cdot\beta)\otimes x=(\alpha\beta)x+(\alpha\beta)-1$$
$$=\alpha\beta x+\alpha\beta-1 \quad \dots (1)$$

$$\alpha \otimes (\beta \otimes x) = \alpha \otimes (\beta x + \beta - 1)$$
$$= \alpha(\beta x + \beta - 1) + \alpha - 1$$
$$= \alpha\beta x + \alpha\beta - 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

(1) = (2) اذن : الشرط (c) محقق .

(d) $1_{IR} \otimes x \overset{?}{=} x$

$1_{IR} = 1$ العنصر الحيادي للحقل IR بالنسبة للعملية الثانية (الضرب) .

$$1_{IR} \otimes x = 1 \otimes x$$
$$= 1 \cdot x + 1 - 1$$
$$= x$$

اذن : الشرط (d) محقق .

ومنه : $(E, \oplus, \otimes)$ فضاء شعاعي على الحقل $(IR, +, \cdot)$.