جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

<u>**التمرين 05:**</u> أوجد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات التالية -متى كان ذلك ممكنا-:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&0\\0&-3&-5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}a&1\\-1&b\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

ايجاد مقلوب مصفوفة:

لتكن المصفوفة A مصفوفة مربعة من الدرجة n أي ان $A \in \mathcal{M}_n(K)$ بحيث يكون محددها غير معدوم فإننا نعرف مقلوب مصفوفة و الذي نرمز له بالرمز A^{-1} بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(B)^T$$

حيث المصفوفة $B = \left(b_{ij}\right)$ هي من نفس در جة المصفوفة A و عناصر هذه المصفوفة معرفة بالعلاقة التالية:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} det\left(A_{ij}\right)$$

<u>مثال:</u> لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثانية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

بين أن المصفوفة A قابلة للقلب و اوجد مقلوبها.

<u>الحل:</u> حتى تكون المصفوفة A قابلة للقلب يكفي ان يكون محددها غير معدوم.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

و بالتالي فإن المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها معطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(B)^T$$

حيث ان:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} det\left(A_{ij}\right)$$

أي يكفي ان نحسب القيم b_{ij}:

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \times 1 = 1, b_{12} = (-1)^{1+2}(-1) = 1,$$

$$b_{21} = (-1)^{1+2} \times 2 = -2, b_{22} = (-1)^{2+2} \times 1 = 1$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

التحقق من أن النتيجة صحيحة:

$$AA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال 2: نفس السؤال بالنسبة للمصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

الحل: أولا نحسب محدد المصفوفة لنتأكد من انها قابلة للقلب:

$$det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

ملاحظة: استعملنا خواص المحددات لحساب محدد المصفوفة السابقة و ذلك بإضافة السطر الثاني للسطر الثالث.

نتيجة: بما أن محدد المصفوفة A غير معدوم فإن المصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها معطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}(B)^T$$

حيث ان:

$$b_{ij}=(-1)^{i+j}det\left(A_{ij}\right)$$

حساب السطر الاول:

$$b_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=0, b_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3, b_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6$$

حساب السطر الثاني:

$$b_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-1, b_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1, b_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=0$$

حساب السطر الثالث:

$$b_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1, b_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1, b_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

و منه فإن:

$$B^T=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

التحقق من النتيجة:

$$AA^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$