كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

قسم الجذع المشترك	**السنة الأولى**
الرياضيات 2	**<u>السلسلة رقم 04</u>**

<u>التمرين 01:</u> باستعمال طريقة مقلوب المصفوفة حل الجمل التالية:

$$1)\begin{cases} 2x+6y+z=3 \\ 3x+2y+4z=2, \\ 4x+y=1 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 5x+4y+z=-1 \\ 2x+7y+2z=2 \end{cases}$$

<u>التمرين 02:</u> باستعمال طريقة كرامر حل الجمل التالية:

$$1)\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ x-y+3z=8\,, \\ x+y+z=6 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ x+3z=7 \\ x-y+5z=10 \end{cases}$$

<u>التمرين 03:</u> حل الجمل المتجانسة التالية:

$$1)\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ 2\ \ x+y+z=0\,, \\ x+4y-3z=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$

الرقم السري

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك — السنة الأولى

المقياس: رياضيات 02 — 2020 / 2019

الحل النموذجي للسلسلة رقم 04

التمرين الأول:

تذكير: جمل المعادلات الخطية

• m معادلة خطية فيها n مجهول تسمى جملة خطية وتكتب على الشكل:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

• إذا كان الطرف الثاني معدوم: $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ نقول أن الجملة متجانسة.

• يمكن كتابة الجملة (S) على شكلها المصفوفي أي:

$$(S) \Leftrightarrow AX = B$$

حيث:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

الرقم السري

• استعمال طريقة مقلوب المصفوفة لحل الجمل:

* تكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب اذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة ومحددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} 2x+6y+z=3 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 4x+y=1 \end{cases}$$

• الشكل المصفوفي للجملة:

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• حساب المحدد $|A|$:

$$|A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{6} & \overset{+}{1} \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=83 \neq 0$$

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة تقبل حل وحيد.

نستعمل طريقة المقلوب وهي معطاة بالعلاقة:

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$$

• حساب A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^{t}$$

الرقم السري

• حساب $adj A$

$$adj A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$adj A = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$(adj A)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

وبالتالي :

$$A^{-1} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{83}\begin{pmatrix} (-4\times3)+(1\times2)+(22\times1) \\ (16\times3)+(-4\times2)+(-5\times1) \\ (-5\times3)+(22\times2)+(-14\times1) \end{pmatrix}$$

$$= 1/83\begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/83 \\ 35/83 \\ 15/83 \end{pmatrix}$$

الرقم السري

مجموعة الحلول :

$$S = \left\{ \left(\frac{12}{83}, \frac{35}{83}, \frac{15}{83} \right) \right\}.$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج .

* نتبع نفس الخطوات لحل الجملة الثانية .

$$(S') \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 4y + z = -1 \\ 2x + 7y + 2z = 2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي لـ (S')

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 66 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}A)^t$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -27 \\ 17 & -4 & -3 \\ -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$(\text{adj}A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ -27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ -27 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

وبالتالي :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix} 1 & 17 & -10 \\ -8 & -4 & 14 \\ -27 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

بعد الحساب نجد

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/66 \\ 32/66 \\ -9/66 \end{pmatrix}$$

مجموعة الحلول :

$$S = \left\{\left(\frac{-37}{66}, \frac{32}{66}, \frac{-9}{66}\right)\right\}$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.

الرقم السري

التمرين الثاني : استخدام طريقة كرامر لحل الجمل.

* تكون الجملة جملة كرامر إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة ومحددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ x-y+3z=8 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

• الشكل المصفوفي للجملة :

$$AX=B \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ملاحظة :

• العمود الأول للمصفوفة A هو معاملات المجهول الأول.
• العمود الثاني للمصفوفة A هو معاملات المجهول الثاني.
• العمود الثالث للمصفوفة A هو معاملات المجهول الثالث.

• من الواضح أن المصفوفة A مربعة (3×3).
• حساب المحدد $|A|$:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-6\neq 0$$

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم ومنه الجملة لكرامر.

حل الجملة: اذا كانت الجملة كسرامر فهي تملك حل وحيد نحسب كما يلي:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

حيث:

x_i = المجاهيل

Δ = محدد المصفوفة المرافقة للجملة.

Δx_i = محدد المصفوفة المرافقة للجملة لكن باستبدال العمود رقم i بالشعاع B في كل مرة.

وعليه الحلول تعطى:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

نحسب المحددات: $\Delta x , \Delta y , \Delta z$

$$\Delta x = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = -6$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -18$$

ومنه

$$x = \frac{-6}{-6} = 1 \quad , \quad y = \frac{-12}{-6} = 2 \quad , \quad z = \frac{-18}{-6} = 3$$

إذن: مجموعة الحلول هي: $S = \{(1, 2, 3)\}$

بالتعويض في إحدى المعادلات نتحقق من صحة النتائج.

الرقم السري

* نتبع نفس الخطوات لحل الجملة الثانية

$$(S)\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ x+3z=7 \\ x-y+5z=10 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

حساب المحدد $|A|$

$$\begin{array}{cccc} & + & - & + \\ |A| = & \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} & = 3 \neq 0 & \end{array}$$

الجملة لكرامر (A مربعة و $|A|\neq 0$)

الحلول تعطى $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta z}{\Delta}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \Delta x = & \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \Delta y = & \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3 \end{array}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 6$$

$$x=\frac{3}{3}=1 \ , \ y=\frac{3}{3}=1 \ , \ z=\frac{6}{3}=2$$

$$(x,y,z)=(1,1,2)$$

الرقم السري

التمرين الثالث : حل الجمل المتجانسة:

$$(S)\begin{cases} 3x+4y-z=0 & \text{——— } L_1 \\ 2x+y+z=0 & \text{——— } L_2 \\ x+4y-3z=0 & \text{——— } L_3 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حساب المحدد $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{4} & \overset{+}{-1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$|A| = 0$ ومنه للجملة عدد غير منتهي من الحلول.

نجري تحويلات

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 & \text{——— } L_2 \\ 2x+2z=0 & \text{——— } L_1-L_3 \\ z-y=0 & \text{——— } L_3-L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x=-z \\ y=z \end{cases}$$

إذن: $(x,y,z) = (-z,z,z)$

$$= z(-1,1,1)$$

وبالتالي من أجل كل قيمة لـ z نحصل على حل جديد للجملة.

الرقم السري

نعتمد نفس الخطوات لحل الجملة الثانية

$$(S)\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 3x-y-4z=0 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حساب المحدد $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{-3} \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=61\neq 0$$

بما أن $|A|\neq 0$ فإن الجملة لديها حل صفري

ووحيد.

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$