$$f(x,y,z)=(x+z,x-y,z+y,x+y+2z)$$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 10: ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي : $f(x,y)=(x+y,x-y,x+y)$

عين نواة f و صورته. هل f متباين, غامر؟

التمرين 11: ليكن $B=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$ الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ و ليكن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^3$ معرف بواسطة :

$$f(e_1)=-2e_1+2e_3,\ f(e_2)=3e_2,\ f(e_3)=-4e_1+4e_3$$

1) عين أساس للنواة f, هل f متباين؟ هل يمكن أن يكون f غامر؟ لماذا؟

2) عين أساس للصورة f, ما هي رتبة f ؟

الرقم السري

حل تمرين 01: حد تطبيق خطي

$f : E \longrightarrow F$

تعريف: نقول عن f أنه خطي إذا كان:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall X \in E, \forall Y \in F :$

$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

① $f : \mathbb{R}^3 = E \longrightarrow \mathbb{R}^2 = F$

$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, y, 0)$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $X = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ و $Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

① $f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2))$

$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \longrightarrow$ ①

② $\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$

$= \alpha(x_1, y_1, 0) + \beta(x_2, y_2, 0)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \longrightarrow$ ②

من ① و ② نجد $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

إذن f تطبيق خطي

② $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (x + 1, y + 2)$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $X = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ و $Y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

① $f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2))$

$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2) \longrightarrow$ ①

الرقم السري

② $\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$

$=\alpha(x_1+1,y_1+2)+\beta(x_2+1,y_2+2)$

$=(\alpha x_1+\alpha+\beta x_2+\beta\,,\,\alpha y_1+2\alpha+\beta y_2+2\beta)$ —— ②

من ① و ② نجد: $f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$

ومنه f ليس تطبيق خطي.

③ $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$(x,y)\longmapsto f(x,y)=(x+y\,,\,x)$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ و $Y=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

① $f(\alpha X+\beta Y)=f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))$

$=f(\alpha x_1+\beta x_2\,,\,\alpha y_1+\beta y_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2\,,\,\alpha x_1+\beta x_2)$ —— ①

② $\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$

$=\alpha(x_1+y_1\,,\,x_1)+\beta(x_2+y_2\,,\,x_2)$

$=(\alpha x_1+\alpha y_1+\beta x_2+\beta y_2\,,\,\alpha x_1+\beta x_2)$ —— ②

من ① و ② نجد: $f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$

ومنه f تطبيق خطي.

④ $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=2x-3y+4z$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1,z_1)$ و $Y=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$

① $f(\alpha X+\beta Y)=f(\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2))$

$=f(\alpha x_1+\beta x_2\,,\,\alpha y_1+\beta y_2\,,\,\alpha z_1+\beta z_2)$

الرقم السري

$$= 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - 3\alpha y_1 - 3\beta y_2 + 4\alpha z_1 + 4\beta z_2 \quad \text{—— } 1$$

2 $\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$

$$= \alpha(2x_1 - 3y_1 + 4z_1) + \beta(2x_2 - 3y_2 + 4z_2),$$

$$= 2\alpha x_1 - 3\alpha y_1 + 4\alpha z_1 + 2\beta x_2 - 3\beta y_2 + 4\beta z_2 \quad \text{—— } 2$$

من 1 و 2 نجد:

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

إذن f تطبيق خطي.

حل تمرين رقم 02:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(1,2) = (2,3) \quad f(0,1) = (1,4)$

1) إثبات أنه يوجد تطبيق خطي وحيد:

قاعدة: إذا كان:

$f: E \longrightarrow F$

و B هو أساس لـ E

و صورة الأساس B بواسطة f هي B'

و B' هو أساس لـ F

فإنه: يوجد تطبيق خطي وحيث:

$f: E \longrightarrow F$

* لدينا: $E = \mathbb{R}^2$ و $F = \mathbb{R}^2$

و $B = \{(1,2), (0,1)\}$ و $B' = \{(2,3), (1,4)\}$

1. الأشعة $(1,2)$ و $(0,1)$ مستقلان خطيا، لأن:

$$\alpha(1,2) + \beta(0,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

و عدد الأشعة المستقلة خطيا $= \text{card } B = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

إذن: الشعاعان: $(1,2)$ و $(0,1)$ تشكلان أساسا لـ $\mathbb{R}^2$

2. الأشعة $(2,3)$ و $(1,4)$ مستقلان خطيا لأن:

$$\alpha(2,3) + \beta(1,4) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

ومن جهة أخرى: عدد الأشعة المستقلة خطيا $= \text{card } B' = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

إذن B' هو أساس لـ $\mathbb{R}^2$

الرقم السري

إذن: حسب القاعدة فإنه يوجد f وحيد حيث:

$f(1,3)=(2,3)$ و $f(0,1)=(1,4)$

2/ إيجاد صيغة f.

بما أن f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}^2$ فهو من الشكل:

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y,\ \lambda x+\gamma y)$$

* يتم البحث عن γ و λ و β و α.

لدينا: $f(1,2)=(\alpha+2\beta,\ \lambda+2\gamma)=(2,3)$

$f(0,1)=(\beta,\ \gamma)=(1,4)$

ومنه:

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=2\\ \lambda+2\gamma=3\\ \beta=1\\ \gamma=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \lambda=-5\\ \beta=1\\ \gamma=4\end{cases}$$

إذن:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=(y,\ -5x+4y)$$

3/ حساب $f(5,6)$

$$f(5,6)=(6,\ -25+24)=(6,-1)$$

حساب $f^{-1}(-2,7)$

$$f^{-1}(-2,7)=(x,y)\Rightarrow f(x,y)=(-2,7)$$
$$\Rightarrow (y,\ -5x+4y)=(-2,7)$$
$$\Rightarrow \begin{cases}y=-2\\ -5x+4y=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=-3\end{cases}$$

إذن $f^{-1}(-2,7)=(-3,-2)$

الرقم السري

حل تمرين 08:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (2x, y+z)$.

$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow g(x,y,z) = (x-z, y)$

1) إيجاد $(f+g)(V)$.

$*\ (f+g)(V) = f(V) + g(V)$

$= f(x,y,z) + g(x,y,z) \quad / V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$= (2x, y+z) + (x-z, y)$.

$= (3x-z, 2y+z)$.

$(f+g)(2,3,4) = (3\times2-4, 2\times3+4) = (2, 10)$

2/ $(3f)(V)$.

$(3f)(V) = 3f(V)$

$= 3f(x,y,z) = 3(2x, y+z)$

$= (6x, 3y+3z)$.

$(3f)(V) = (3f)(2,3,4) = (6\times2, 3\times3+3\times4)$

$= (12, 21)$.

$(2f-5g)(W) = 2f(W) - 5g(W) \quad | W = (5,1,3)$

$= 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)$

$= 2(10,4) - 5(2,1) = (10,3)$

صفحة 06

حل تمرين 09

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x+y, x-y, z+y, x+y+2z)$

قاعدة: ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيق خطي

نواة f

$\ker f = \{ X \in E : f(X) = 0_F \} \subset E$

$\text{Im} f = \{ Y \in F / \exists X \in E : f(X) = Y \} \subset F$

1/ إيجاد $\ker f$ = نواة f:

$\ker f = \{ X \in \mathbb{R}^3 = E ; f(X) = 0_{\mathbb{R}^4 = F} \}$

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0,0) \}$

لدينا: $f(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow (x+y, x-y, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

ومنه، $\ker f = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \dim \ker f = 0$

بما أن $\ker f = \{(0,0,0)\}$ ~~ker f~~ فإن f متباين.

قاعدة: إذا كان $f : E \longrightarrow F$

و $\ker f = \{0_E\}$ فإن f متباين.

ج/ إيجاد صورة f «Imf»

$\mathrm{Im}f = \{Y \in F \,/\, \exists X \in E : f(X) = Y\} \subset F$.

$\mathrm{Im}f = \{(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4 \,/\, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 =$

$(x',y',z',t') = f(x,y,z)\}$.

$= \{(x',y',z',t') = (x+z,\ x-y,\ z+y,\ x+y+2z)\}$.

$= \{(x',y',z',t') = (x,x,0,x) + (0,-y,y,y) + (z,0,z,2z)\}$

$= \{(x',y',z',t') = x(1,1,0,1) + y(0,-1,1,1) + z(1,0,1,2)\}$.

$= \langle \overset{u}{(1,1,0,1)}, \overset{v}{(0,-1,1,1)}, \overset{w}{(1,0,1,2)} \rangle$ مولدة لـ Imf

دراسة الاستقلال الخطي لـ u و v و w

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ حيث:

$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) + \gamma(1,0,1,2) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

إذن الأشعة u و v و w مستقلة خطيا

وبما أنها مولدة لـ Imf فهي تشكل أساس لـ Imf

$\dim \mathrm{Im}f = \boxed{3}$

$\dim \mathrm{Im}f = 3$ f ليس غامر لأن:

$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \neq \dim \mathrm{Im}f$

قاعدة: يكون f غامر إذا كان: $\dim F = \dim \mathrm{Im}f$

الرقم السري

حل تمرين ١٠:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$

إيجاد نواة f « ker f »:

① $\ker f = \{X \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0)\}$

لدينا: $f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x+y, x-y, x+y) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ومنه: $\ker f = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

بما أن: $\ker f = \{(0,0)\}$ فإن f متباين

صورة f

② $\mathrm{Im} f = \{Y \in F \,/\, \exists X \in E : Y = f(X)\}$.

$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x',y',z') = f(x,y)\}$

$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = (x+y, x-y, x+y)\}$

$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = (x,x,x) + (y,-y,y)\}$

$= \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = x(1,1,1) + y(1,-1,1)\}$

$= \langle \overset{u}{(1,1,1)}, \overset{v}{(1,-1,1)} \rangle \rightarrow$ أي u و v تولد Im f

~~[illegible]~~ دراسة الاستقلال الخطي لـ u و v.

ليكن: $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha u + \beta u = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,1) = (0,0,0)$

صفحة 09

الرقم السري

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + B = 0 \\ \alpha - B = 0 \\ \alpha + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = B = 0$$

أي أن u و v مستقلين خطيا.

بما أن u و v تولدان Imf و مستقلين خطيا فهما أساس لـ Imf.

$$\dim \operatorname{Im} f = \boxed{2} \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

إذن f ليس غامر.

الرقم السري

حل تمرين 11: $B=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$

أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(e_1) = -2e_1+2e_3 \quad , \quad f(e_2)=3e_2$$

1/ تعيين f :

بما أن e_1 و e_2 و e_3 أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$ فإن

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)= x e_1 + y e_2 + z e_3$

$\Rightarrow f(x,y,z) = f(xe_1+ye_2+ze_3)$

$= x f(e_1)+ y f(e_2)+ z f(e_3)$ (خواص التطبيق الخطي f.)

$= x[-2e_1+2e_3] + y(3e_2) + z(-4e_1+4e_3)$

$= x[-2(1,0,0)+2(0,0,1)] + y(3(0,1,0)) + z(-4(1,0,0)+4(0,0,1))$

$= (-2x,0,2x)+(0,3y,0)+(-4z,0,4z)$

$= (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$

إذن:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$$

2/ إيجاد نواة f :

$\ker f = \{X\in E, f(X)=0_F\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2, f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

لدينا :

الرقم السري

$f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

ومنه: $\ker f = \{(x,y,z) = (-2z, 0, z)\}$.

$= \{(x,y,z) = z(-2,0,1)\}$.

$= \{(x,y,z) = z(-2,0,1)\}$.

$= \langle \underbrace{(-2,0,1)}_{u} \rangle$ أي $\ker f$ مولد بـ u

إذن:

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = z(-2,0,1)\}$.

$\Leftarrow \dim \ker f = 1$ ومنه f ليس متباين.

قاعدة: $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim \ker f = 1 \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$

ولكي يكون f غامر يجب أن يكون:

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = \dim F$.

$\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim \operatorname{Im} f = 2$ ولكن

أي f ليس غامر

إيجاد صورة f: $\operatorname{Im} f$

الرقم السري

$Imf = \{ Y \in F / \exists X \in E : Y = f(X) \}$.

$Imf = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 , \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x', y', z') = f(x,y,z) \}$.

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) \}$

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (-2x, 0, 2x) + (0, 3y, 0) + (-4z, 0, 4z) \}$.

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = x(-2, 0, 2) + y(0, 3, 0) + z(-4, 0, 4) \}$

$= \langle \underset{u}{(-2, 0, 2)}, \underset{v}{(0, 3, 0)}, \underset{w}{(-4, 0, 4)} \rangle$

أي
u و v و w تولد Imf :

بما أن dimImf = 2 ⟸ u و v و w مرتبطة خطيا

أي عدد الأشعة المشكلة للأساس هي 2.

~~نلاحظ~~

نلاحظ أن : $w = 2(-2, 0, 2)$ u

أي : u و w مرتبطين خطيا

وبالتالي يمكن أخذ u و v كأساس لـ Imf

ومنه أساس Imf هو : $(-2, 0, 2)$ و $(0, 3, 0)$

* رتبة f : (rg f) = عدد أشعة أساس Imf = rg f

$\Rightarrow \boxed{rg f = dim Imf = 2}$

الرقم السري

ملاحظة

الرجاء من
الطلبة التأكد
من النتائج

بالتوفيق