

Solution de la deuxième partie de l'exercice N°3 de la Série N°2

Exercice 1 Suite de l'exercice 1, et 2.

- 1- Dédurre, de l'exercice 2, une base D_r^{-1} -orthonormée de \mathbb{R}^3 .
- 2-Déterminer les composantes principales des profils-lignes et déduire celles des profils-colonnes.
- 3-Quelle sont les valeurs de l'espérance et la variance (empiriques) de chaque composante principale pour les deux profils? Quelles sont les valeurs des corrélations entre les composantes principales? Que peut-on déduire?
- 4-Déterminer les contributions absolues et relatives, de chaque ligne, aux inerties des axes principaux.
5. Dédurre, de la question 2, les coordonnées des lignes des deux nuages de points Y_r et Y_c dans les nouvelles bases associées.
- 6.Dans le même plan définit pas les deux premiers axes principaux, représenter les deux nuages de point associes à Y_r et Y_c .
- 7-Analyser et discuter les résultats obtenus.

Solution

Profils-lignes:

$$X_r = \begin{pmatrix} 0.106\ 38 & 0.595\ 74 & 0.255\ 32 & 4.255\ 3 \times 10^{-2} \\ 0.013\ 4 & 4.857\ 6 \times 10^{-2} & 0.351\ 76 & 0.586\ 27 \\ 0.288\ 46 & 0.442\ 31 & 0.192\ 31 & 7.692\ 4 \times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

, Correlation matrix: $\begin{pmatrix} 1.0 & 0.553\ 9 & -0.953\ 74 & -0.721\ 41 \\ 0.553\ 9 & 1.0 & -0.778\ 57 & -0.976\ 16 \\ -0.953\ 74 & -0.778\ 57 & 1.0 & 0.896\ 23 \\ -0.721\ 41 & -0.976\ 16 & 0.896\ 23 & 1.0 \end{pmatrix}$, Correlation matrix:

trix:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.553\ 9 & -0.953\ 74 & -0.721\ 41 \\ 0.553\ 9 & 1.0 & -0.778\ 57 & -0.976\ 16 \\ -0.953\ 74 & -0.778\ 57 & 1.0 & 0.896\ 23 \\ -0.721\ 41 & -0.976\ 16 & 0.896\ 23 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\ 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\ 66 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 0.479\ 66, \lambda_2 = 5.310\ 9 \times 10^{-2}, \lambda_3 = 5.997 \times 10^{-7}, \lambda_4 = 0.$$

$$u_1^* := \begin{pmatrix} 0.13246 \\ 0.32589 \\ -9.0791 \times 10^{-2} \\ -0.36758 \end{pmatrix}, \quad u_2^* := \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457 \times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$u_3^* := \begin{pmatrix} 2.2420 \times 10^{-2} \\ -0.21551 \\ 0.42187 \\ -0.22877 \end{pmatrix}, \quad u_4^* := \begin{pmatrix} 0.13106 \\ 0.33963 \\ 0.27095 \\ 0.25835 \end{pmatrix}.$$

Profils-colonnes:

$$X_c = \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.47966, \lambda_2 = 5.3109 \times 10^{-2}, \lambda_3 = 0.$$

$$v_k^* := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} N D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} N D_c^{-1} u_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_c^t u_1^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.47966}} \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix}^T \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0.13246 \\ 0.32589 \\ -9.0791 \times 10^{-2} \\ -0.36758 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.22795 \\ -0.48442 \\ 0.25646 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^* &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} N D_c^{-1} u_2^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} X_c^t u_2^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{5.3109 \times 10^{-2}}} \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix}^T \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$v_2^* = \begin{pmatrix} -0.3956 \\ 2.4677 \times 10^{-3} \\ 0.3931 \end{pmatrix}.$$

Une base D_r^{-1} -orthonormée de \mathbb{R}^3 :

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0.22795 \\ -0.48442 \\ 0.25646 \end{pmatrix}, v_2^* = \begin{pmatrix} -0.3956 \\ 2.4677 \times 10^{-3} \\ 0.3931 \end{pmatrix}, v_3^* = \begin{pmatrix} 0.29616 \\ 0.37618 \\ 0.327660 \end{pmatrix}.$$

Composantes principales des profils-lignes:

$$c_k = X_r D_c^{-1} u_k^*, k = 1, 2, 3.$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.13246 \\ 0.32589 \\ -9.0791 \times 10^{-2} \\ -0.36758 \end{pmatrix} \\ c_1 = \begin{pmatrix} 0.53306 \\ -0.89186 \\ 0.54207 \end{pmatrix}.$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.30957 \\ -0.26764 \\ -0.1064 \\ 6.4457 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ c_2 = \begin{pmatrix} -0.30783 \\ 1.5098 \times 10^{-3} \\ 0.27647 \end{pmatrix}.$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0.10638 & 0.59574 & 0.25532 & 4.2553 \times 10^{-2} \\ 0.0134 & 4.8576 \times 10^{-2} & 0.35176 & 0.58627 \\ 0.28846 & 0.44231 & 0.19231 & 7.6924 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 0.13106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33963 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.27095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25835 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.2420 \times 10^{-2} \\ -0.21551 \\ 0.42187 \\ -0.22877 \end{pmatrix} \\ c_3 = \begin{pmatrix} 2.8327 \times 10^{-5} \\ 1.5609 \times 10^{-5} \\ -8.2761 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$c_k = Y_r D_c^{-1} u_k^* = (X_r - 1_p g_r^t) D_c^{-1} u_k^*$$

$$\begin{aligned} c_1 &= Y_r D_c^{-1} u_1^* = (X_r - 1_p g_r^t) D_c^{-1} u_1^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= Y_r D_c^{-1} u_2^* = (X_r - 1_p g_r^t) D_c^{-1} u_2^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_2^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= Y_r D_c^{-1} u_3^* = (X_r - 1_p g_r^t) D_c^{-1} u_3^* \\ &= X_r D_c^{-1} u_3^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 &= Y_r D_c^{-1} g_r = (X_r - 1_p g_r^t) D_c^{-1} g_r \\ &= X_r D_c^{-1} g_r - 1_p \end{aligned}$$

En conclusion la matrice des composantes principales des profils-lignes est:

$$C := \begin{pmatrix} 0.53306 & -0.30783 & 0 & 0 \\ -0.89186 & 1.5098 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.54207 & 0.27647 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Composantes principales des profils-colonnes (relations *quasi-barycentriques*):

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_r \tilde{c}_k \text{ et } \tilde{c}_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_c c_k, \quad k = 1, 2.$$

$$\tilde{c}_k := \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X_c c_k, \quad k = 1, 2.$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} X_c c_1 = \frac{1}{\sqrt{0.47966}} \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0.53306 \\ -0.89186 \\ 0.54207 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.69995 \\ 0.66454 \\ -0.23208 \\ -0.98539 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} X_c c_2 = \frac{1}{\sqrt{5.3109 \times 10^{-2}}} \begin{pmatrix} 0.24039 & 3.8463 \times 10^{-2} & 0.72118 \\ 0.51949 & 5.3804 \times 10^{-2} & 0.42672 \\ 0.27907 & 0.48837 & 0.23256 \\ 0.04878 & 0.85366 & 9.7561 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -0.30783 \\ 1.5098 \times 10^{-3} \\ 0.27647 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.54433 \\ -0.18163 \\ -9.0573 \times 10^{-2} \\ 5.7476 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En conclusion la matrice des composantes principale profils-colonnes est:

$$\tilde{C} := \begin{pmatrix} 0.69995 & 0.54433 & 0 \\ 0.66454 & -0.18163 & 0 \\ -0.23208 & -9.0573 \times 10^{-2} & 0 \\ -0.98539 & 5.7476 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

3- a) Les valeurs de l'espérance et la variance de chaque composante principale pour les deux profils:

$$C = \begin{pmatrix} 0.53306 & -0.30783 & 0 & 0 \\ -0.89186 & 1.5098 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.54207 & 0.27647 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Les valeurs les corrélations entre les composantes principales:

c) Dédution:

4. Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au k -ième axe u_k^* :

$$Ctr(i, k) := \frac{f_i \cdot c_k^2(i)}{\sum_{i=1}^p f_i \cdot c_k^2(i)} = \frac{f_i \cdot \tilde{c}_k^2(i)}{\lambda_k}, \quad i = 1, \dots, 3; \quad k = 1, 2.$$

Contribution relative du profil-colonne j de de la matrice Y_c au k -ième axe v_k^* :

$$\widetilde{Ctr}(j, k) = \frac{f_j \cdot \tilde{c}_k^2(j)}{\sum_{j=1}^q f_j \cdot \tilde{c}_k^2(j)} = \frac{f_j \cdot \tilde{c}_k^2(j)}{\lambda_k}, \quad j = 1, \dots, 4; \quad k = 1, 2.$$

Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au le premier axe u_1^* :

$$Ctr(1, 1) = \frac{f_1 \cdot c_1^2(1)}{\lambda_1} =, \quad Ctr(2, 1) = \frac{f_2 \cdot c_1^2(2)}{\lambda_1}, \quad Ctr(3, 1) = \frac{f_3 \cdot c_1^2(3)}{\lambda_3}.$$

Alors:

$$C = \begin{pmatrix} 0.53306 & -0.30783 & 0 & 0 \\ -0.89186 & 1.5098 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.54207 & 0.27647 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.47966, \quad \lambda_2 = 5.3109 \times 10^{-2}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\ 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\ 66 \end{pmatrix}.$$

$$Ctr(1,1) = \frac{0.296\ 16 (0.533\ 06)^2}{0.479\ 66} 100 = 17.545\%,$$

$$Ctr(2,1) = \frac{0.376\ 18 (-0.891\ 86)^2}{0.479\ 66} 100 = 62.389\%,$$

et

$$Ctr(3,1) = \frac{0.327\ 66 (0.542\ 07)^2}{0.479\ 66} 100 = 20.075\%.$$

Contribution relative du profil-ligne i de de la matrice Y_r au 2-ième axe u_2^* :

$$C = \begin{pmatrix} 0.533\ 06 & -0.307\ 83 & 0 & 0 \\ -0.891\ 86 & 1.509\ 8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.542\ 07 & 0.276\ 47 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.479\ 66, \lambda_2 = 5.310\ 9 \times 10^{-2}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0.296\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376\ 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.327\ 66 \end{pmatrix}.$$

$$Ctr(1,2) = \frac{f_1 \cdot c_2^2(1)}{\lambda_2}, \quad Ctr(2,2) = \frac{f_2 \cdot c_2^2(2)}{\lambda_2}, \quad Ctr(3,2) = \frac{f_3 \cdot c_2^2(3)}{\lambda_2}.$$

Alors

$$Ctr(1,2) = \frac{0.296\ 16 (-0.307\ 83)^2}{5.310\ 9 \times 10^{-2}} 100 = 52.842\%,$$

$$Ctr(2,2) = \frac{0.376\ 18 (1.509\ 8 \times 10^{-3})^2}{5.310\ 9 \times 10^{-2}} 100 = 1.614\ 6 \times 10^{-3}\%,$$

et

$$Ctr(3,2) = \frac{0.327\ 66 (0.276\ 47)^2}{5.310\ 9 \times 10^{-2}} 100 = 47.158\%.$$

En conclusion la matrice de contributions des profils-lignes sur les deux axes principaux est:

$$\mathbf{Ctr} = \begin{pmatrix} 20.07 & 52.84 \\ 62.38 & 1.61 \times 10^{-3} \\ 17.54 & 47.15 \end{pmatrix} \%$$

5. Les coordonnées des lignes des deux nuages de points Y_r et Y_c dans les nouvelles bases associées:

$$Y_r^* = C = \begin{pmatrix} 0.533\ 06 & -0.307\ 83 & 0 & 0 \\ -0.891\ 86 & 1.509\ 8 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0.542\ 07 & 0.276\ 47 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_c^* = \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0.699\ 95 & 0.544\ 33 & 0 \\ 0.664\ 54 & -0.181\ 63 & 0 \\ -0.232\ 08 & -9.057\ 3 \times 10^{-2} & 0 \\ -0.985\ 39 & 5.747\ 6 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$