في هذه الحالة نكتب $E = E_1 \oplus E_2$ ونقول أن E هو المجموع المباشر لـ E_1 و E_2.

نظرية: ليكن E_1 و E_2 فضاءان شعاعيين جزئيين من E حيث $E = E_1 + E_2$. ~~ ~~ان الخاصيتين التاليتين متكافئتين:

1) كل عنصر $x \in E$ يكتب بطريقة وحيدة:

$$x = x_1 + x_2 \quad , \quad x_1 \in E_1 \text{ و } x_2 \in E_2$$

2) $$E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

مثال: $E_1 = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\}$ و $E_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$ يشكلان فضاءان شعاعين جزئيين مكملان من $\mathbb{R}^2$ لأن $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2$ و $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

3) أساس فضاء شعاعي

تعريف: جزء G من فضاء شعاعي E على الحقل K يسمى مولد لـ E اذا كان الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ G يساوي E.

يعني $G \neq \phi$ جزء مولد لـ $E \iff$ كل عنصر x من E يكتب:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$ و $x_1, x_2, \dots, x_p \in G$،

تعريف: مجموعة الأشعة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ من الفضاء الشعاعي E تكون مرتبطة خطية اذا وجد سلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ ليست بالضرورة كلها معدومة حيث:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \in E.$$

تعريف: مجموعة منتهية من الأشعة تكون مستقلة خطيا اذا لم تكن مرتبطة خطيا.

يعني $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مستقلة خطيا $\iff$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \quad \text{tq} : (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$$

$$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0)$$

مثال: $\{(1,0,3), (0,1,2), (2,-3,0)\}$ مرتبطة خطيا لأنه يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ليست كلها معدومة حيث:

$$\lambda_1(1,0,3) + \lambda_2(0,1,2) + \lambda_3(2,-3,0) = (0,0,0)$$

هذه الجملة تقبل مالا نهاية من الحلول:

مثلا $\lambda_1 = -2/3$ ، $\lambda_2 = 1$ ، $\lambda_3 = 1/3$

مثال: $\{(2,1,1),(1,3,1),(-2,1,3)\}$ مستقلة خطيا لأن:

$$\lambda_1(2,1,1)+\lambda_2(1,3,1)+\lambda_3(-2,1,3)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

نظرية: مجموعة $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ مرتبطة إذا وفقط إذا وجد شعاع x_i من هذه المجموعة حيث:

$$x_i=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_{i-1}x_{i-1}+\lambda_{i+1}x_{i+1}+\dots+\lambda_nx_n$$

مثال: $\{(1,0,3),(0,1,2),(2,-3,0)\}$ مرتبطة لأن:

$$(0,1,2)=-1/3(2,-3,0)+2/3(1,0,3).$$

تعريف: عناصر المجموعة المولدة للفضاء الشعاعي E ~~تسمى~~ هم الأشعة المولدة لـ E.

تعريف: فضاء شعاعي E على الحقل K يكون ذو بعد منته إذا كان يقبل عدد منته من الأشعة المولدة. في الحالة العكسية نقول أن الفضاء الشعاعي ذو بعد غير منته.

* فيما تبقى من الفصل، نفرض أن E ذو بعد منته.

تعريف: المجموعة $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ من الفضاء الشعاعي E على الحقل K، تسمى أساس على E إذا تحقق:

1) $x_1,x_2,\dots,x_n$ أشعة مولدة لـ E.

2) $B=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ مستقلة خطيا.

مثال: $B=\{(1,0),(0,1)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$.

* B يسمى أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^2$.

نظرية: مجموعة $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset E$ تكون أساس لـ E إذا وفقط إذا كان كل شعاع x من E يكتب بصفة وحيدة كمايلي:

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$$

$\lambda_i,\ i=1,\dots,n$ يسمى الإحداثية رقم i للشعاع x بالنسبة للأساس $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

مثال ! $B=\{(2,1,1),(1,3,1),(-2,1,3)\}$

1) B أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

B جموعة مستقلة خطيا.

2) $\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

نكتب x : $x=(x_1,x_2,x_3)=a_1(2,1,1)+a_2(1,3,1)+a_3(-2,1,3)$

حيث a_1,a_2,a_3 تحقق المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 2a_1+a_2-2a_3=x_1 \\ a_1+3a_2+a_3=x_2 \\ a_1+a_2+3a_3=x_3 \end{cases}$$

x_1,x_2,x_3 تكون إحداثيات x في الأساس القانوني.

بحل الجملة السابقة نجد

$$a_1=\frac{8x_1-5x_2+7x_3}{18}$$

$$a_2=\frac{-x_1+4x_2-2x_3}{9}$$

$$a_3=\frac{-2x_1-x_2+5x_3}{18}$$

مثلا لحساب إحداثيات $x=(0,7,5)$ في الأساس الجديد نعوض x_1,x_2,x_3 بـ 0، 7، 5 على التوالي نجد :

$x_{(B)}=(0,2,1)$

ملاحظة : نلاحظ أن إحداثيات x في الأساس القانوني تختلف على إحداثياته في هذا الأساس. يعني إحداثيات شعاع تتعلق بالأساس.

نظرية : كل فضاء شعاعي E ذو بعد منته، مختلف على $\{0\}$ يقبل أساس.

نظرية : ليكن $B=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ أساس للفضاء شعاعي E على $\mathbb{K}$، إذن كل أساس آخر لـ E يحتوي على نفس عدد من الأشعة.

تعريف: عدد عناصر أساس فضاء شعاعي E على K يسمى بعد الفضاء الشعاعي ونرمز له بـ $\dim_K E$.

مثال: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ ، $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

نظرية: لتكن $L=\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ جزء من الأشعة مستقلة من فضاء شعاعي E على الحقل K، ذو بعد منته n. لدينا:

1) $p=n \Rightarrow$ L أساس لـ E.

2) $p<n \Rightarrow$ يوجد جزء $H=\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ من E حيث $L \cup H$ يكون أساس لـ E.

نظرية: ليكن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين لـ فضاء شعاعي E على الحقل K، بعدهما منتهيان.

1) $\dim_K(E_1 \oplus E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2$

2) $\dim_K(E_1 + E_2) = \dim_K E_1 + \dim_K E_2 - \dim_K(E_1 \cap E_2)$