Chapitre 1

Intégration numérique

Dans ce chapitre nous intéressons des méthodes d'intégration numérique, interviennent essentiellement lorsque une primitive de $f(x)$ est d'expression assez compliquée ou inconnue, ou lorsque n'est connue que par points, on peut l'approcher alors par interpolation, puis on intègre numériquement l'interpolée.

Les méthodes les plus utilisées sont la méthode du trapèze et de Simpson. La méthode aussi du rectangle peut être aussi considérer.

1.1 Méthodes des rectangles :

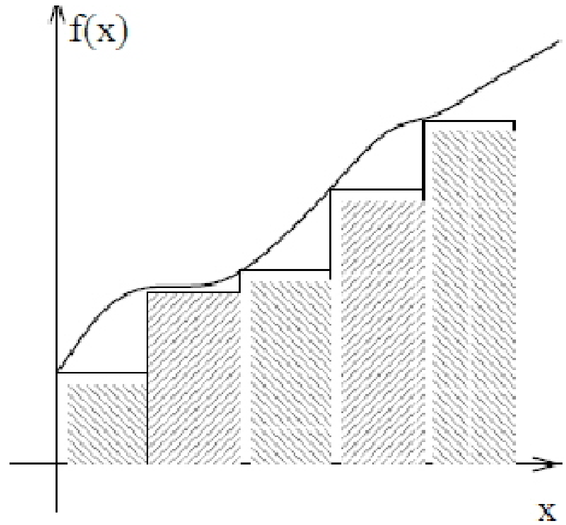
On considère une subdivision de $[a, b]$ en sous intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$ ou $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, ..., n), a = x_0, b = x_n$ et $h = \frac{b-a}{n}$

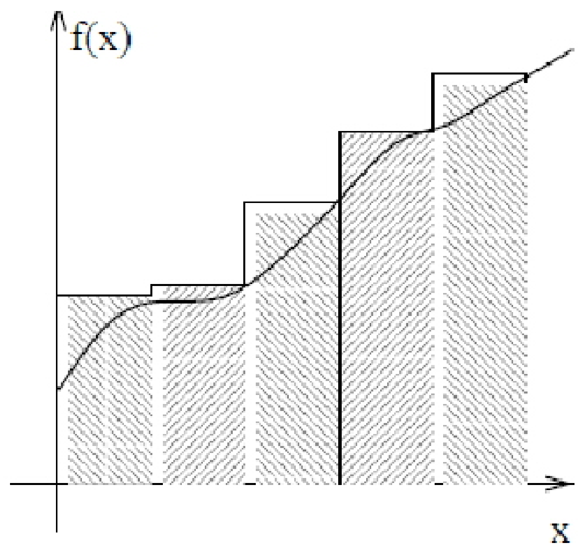
1.1.1 Formule de rectangle à gauche

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, h$$

1.1.2 Formule de rectangle à droite :

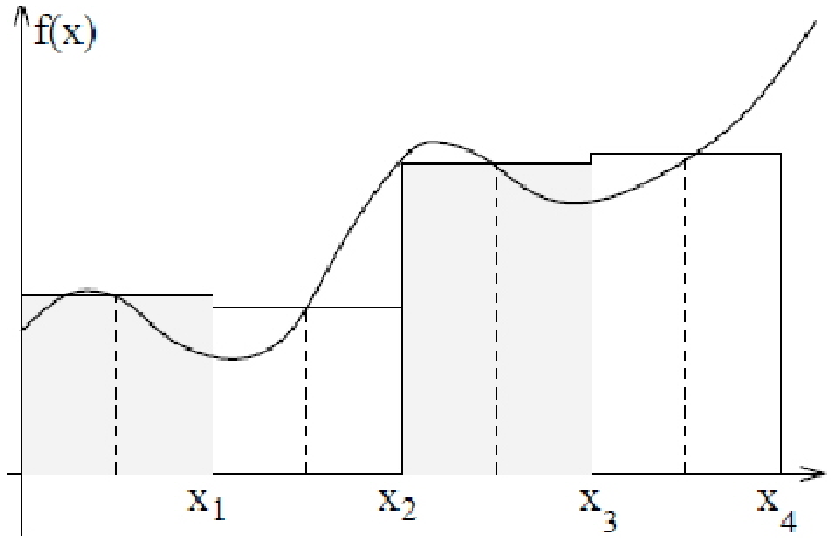
$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\, h$$





1.1.3 Formule de rectangle au point milieu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) h$$

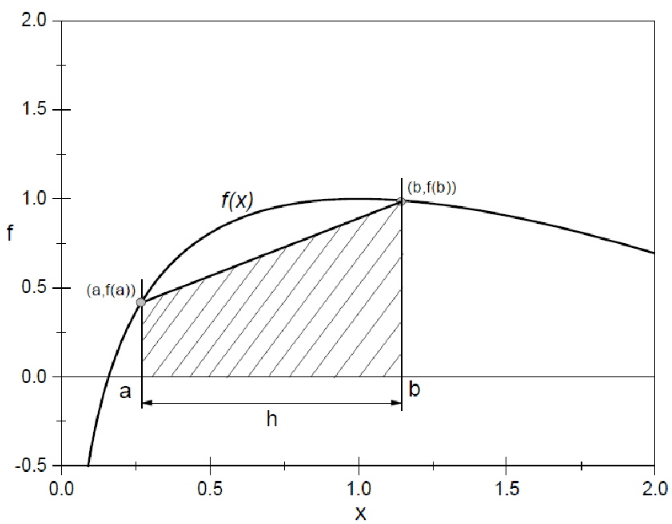


1.2 Méthode de trapèze

1.2.1 Formule de trapèze

Cette formule est très simple, elle permet de remplacer la courbe $f(x)$ de la fonction à intégrer par un segment qui relie les points $(a, f(a))$et $(b, f(b))$ ce qui

donne un trapèze



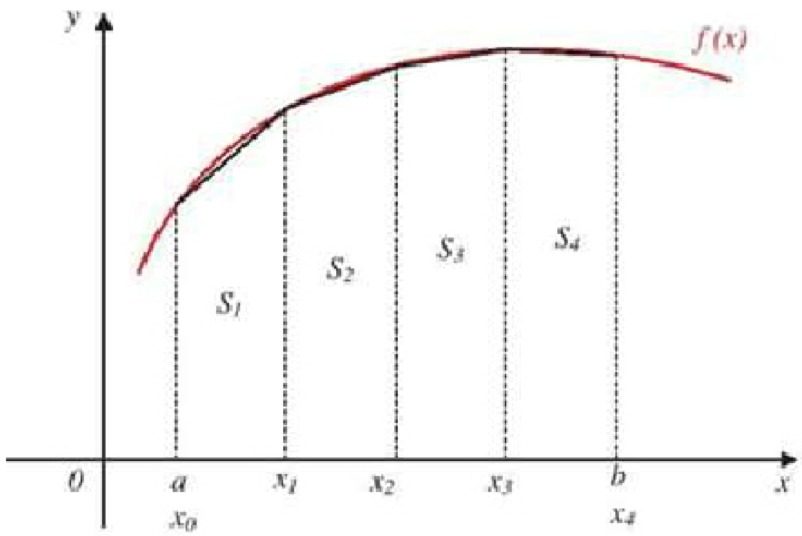
donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

1.2.2 Formule de trapèze généralisée

On divise l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$,ou $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, ..., n), a = x_0, b = x_n$ et $h = \frac{b-a}{n}$. On applique la formule de trapèze a chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_2) + f(x_3)\right) + ... + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]
\end{aligned}$$



1.3 Méthode de Simpson :

Dans cette méthode on suppose que n est pair (soit $n = 2m$), puis on subdivise $[a, b]$ en sous intervalles égaux $[x_i, x_{i+1}]$de longueur h, $(i = 0, 1, ..., m - 1)$, puis

on remplace $f(x)$ chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ non pas par une droite comme dans les trapèzes, mais par une parabole ayant aux abscisses x_{i-1}, x_i et x_{i+1} mêmes valeurs que f c'est ʻa dire par une interpolation quadratique sur ces trois points. Le polynôme P_1 d'interpolation de Newton en x_{i-1}, x_i et x_{i+1} :

$$P_1(x) = f(x_{i-1})\frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)}{2h^2} + f(x_i)\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-h^2} + f(x_{i+1})\frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2h^2}$$

D'autre part la surface S_i d´elimitée par cette parabole, les droites $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ et l'axe des abscisses s'obtient en calculant $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx$ d'où :

$$S_i = \frac{h}{3}\left(f\left(x_{i-1}\right) + 4f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right)$$

Ceci donne l'approximation de Simpson S_h de I, en sommant les aires S_i pour $i = 1, ..., n-1$. Finalement :

$$S_h = \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right) + f\left(x_{2m}\right) + 4\sum_{k=1}^{m} f\left(x_{2k-1}\right) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f\left(x_{2k}\right)\right]$$

1.4 Erreurs de quadrature

Théorème 1 *Soit f une fonction de classe* $C^{n+1}([a;b])$ *telle que* $f^{(n+1)}$ *existe sur*$]a;b[$. *Si les valeurs de* f *aux points* $x_0; x_1; ...; x_n$ *sont connues,et*

$\int_a^b P_i(x)dx$ est l'approximation d'ordre n de $\int_a^b f(x)\,dx$ où $Pi(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction f alors :

$$E(f) = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_i(x)dx\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

où

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Appliquons ce théorème aux méthodes usuelles. On obtient.

1.4.1 Erreur de méthode des rectangles

$$E(f) \leq \frac{M_1}{2}(b-a)\,h$$

1.4.2 Erreur de la méthode des trapèze

$$E(f) \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3$$

1.4.3 Erreur de la méthode de Simpson

Pour $n = 2$ on a

$$E(f) \leq \frac{M_4}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

La formule composée correspondante

$$E(f) \leq \frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5$$