Chapitre 1

Méthodes des résolution approximative des systèmes d'équations linéaires

On considère un système linéaire (S) :$Ax = b$ avec A inversible. L'idée est de déduire un schéma itératif de la décomposition de A sous la forme $A = M - N$où M est une matrice

inversible. En pratique on suppose que les systèmes de matrice M sont « faciles » à résoudre (par exemple M diagonale, triangulaire, . . .). Le système (S) s'écrit alors $Mx = Nx+b$ c'est-à-dire $x = Bx + c$ avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$ et on considère le schéma itératif associé :

$$x(0) \in Kn; Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b :$$

Nous allons maintenant considérer deux exemples classiques : les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel . Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique

décomposition de la matrice$A = (a_{_{i;j}})1 \leq i; j \leq n$ sous la forme $A = D - E - F$ avec :

$D = (d_{_{i;j}})1 \leq i; j \leq n$ diagonale, telle que $d_{ii} = a_{ii}$et $d_{i;j} = 0$ pour$i \neq j$;

$E = (e_{i;j})1 \leq i; j \leq n$ triangulaire inférieure **stricte** telle que $e_{i;j} = -a_{i;j}$ si $i > j$ et $ei_{;j} = 0$ si $i \leq j$;

$F = (fi_{;j})1 \leq i; j \leq n$ triangulaire supérieure **stricte** telle que $fi_{;j} = -a_{i;j}$ si $i < j$ et $f_{i;j} = 0$ si $i \geq j$;

1.1 Méthode de Jacobi

Description : On considère un système linéaire (S) : $Ax = b$ avec A inversible. On pose $A = M - N$ avec $M = D$ inversible et $N = E + F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b \Leftrightarrow x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b$:

Definition 1 . *La matrice $B_J = D^{-1}(E+F)$ s'appelle la matrice de Jacobi associée à A.*

Si $x(0)$ est le vecteur initial donné, l'algorithme de Jacobi est de la forme :

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1 \text{et } j\neq i}^{n} a_{ij}x^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1; ...; n$$

Explicitement, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{aligned}$$

Convergence

Théorème 1 . *La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(B_J) < 1$.*

Exemple 1 *: Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ on obtient :*

$$B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrices B_J sont 0 et $\pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$et la méthode de Jacobi diverge.

1.2 Méthode de Gauss-Seidel

Description : On considère un système linéaire (S) :$Ax = b$ avec A inversible. On pose $A = M-N$ avec $M = D - E$ inversible et $N = F$. Le schéma itératif s'écrit alors

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \tag{1.1}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b :$$

Définition 1 *La matrice $BGS = (D-E)^{-1}F$ s'appelle la matrice de Gauss-Seidel associée à A.*

en explicitant 1.1 on obtient :

$$\begin{array}{rcc}
a_{11}x_1^{(k+1)} & = & -a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\
a_{22}x_2^{(k+1)} & = & -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{ii}x_i^{(k+1)} & = & -a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{ii}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & = -a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n
\end{array}$$

Convergence

Théorème 2 . *La méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(BGS) < 1$.*

Exemple 2 *: Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
BGS &= (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrices BGS sont 0 et $\frac{-1}{2}$ (de multiplicité 2). On a donc $\rho(BGS) = 1/2 < 1$ donc la méthode de Gauss-Seidel converge.

Corollaire 1 . *Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors la méthode de Gauss-Seidel converge.*

Critère d'arrêt

On utilise le plus souvent le critère suivant

$$\left|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}\right| \leq \varepsilon \qquad\qquad i = 1; ...; n$$

Définition 2 *Une matrice* $A = (a_{i;j})_{1 \leq i;j \leq n}$*est dite à diagonale strictement dominante*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1 et\ j \neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1; ...; n$$

Théorème 3 *Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Alors A est inversible et les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent toutes les deux*

Remarque 1 *: Gauss-Seidel converge plus vite que Jacobi*