جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

التمرين 03: ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، و ليكن التطبيق الخطي:

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto (x-y, x+z, y+z)$$

1) أوجد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

2) ليكن $a=(1,3,-1)$ ، $b=(1,3,0)$ ، $c=(1,2,-1)$

أ- بين أن $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- أوجد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني إلى الأساس B'، ثم أوجد P^{-1}.

ج- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام مصفوفة العبور.

د- أوجد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام التعريف.

التمرين 03: ليكن $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$، وليكن التطبيق الخطي:

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\longmapsto(x-y,\,x+z,\,y+z)$$

1) ايجاد مصفوفة f في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$:

$f(e_1)=f(1,0,0)=(1,1,0)=1.e_1+1.e_2+0.e_3$

$f(e_2)=f(0,1,0)=(-1,0,1)=(-1).e_1+0.e_2+1.e_3$

$f(e_3)=f(0,0,1)=(0,1,1)=0.e_1+1.e_2+1.e_3$

$$\Rightarrow M(f,B,B)=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2) ليكن $a=(1,3,-1)$ ، $b=(1,3,0)$ ، $c=(1,2,-1)$

أ- نبين أن $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$:

لدينا: $\text{card}\,B'=3=\dim\mathbb{R}^3$ فإنه

يكفي اثبات أن: a، b، c مستقلة خطيا:

ليكن $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$\alpha.a+\beta.b+\gamma.c=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Rightarrow\alpha(1,3,-1)+\beta.(1,3,0)+\gamma(1,2,-1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma,\,3\alpha+3\beta+2\gamma,\,-\alpha-\gamma)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \text{---}(1)\\ 3\alpha+3\beta+2\gamma=0 & \text{---}(2)\\ -\alpha-\gamma=0 & \text{---}(3)\end{cases}$$

$(3)\Rightarrow\alpha=-\gamma$

$(1)\Rightarrow-\gamma+\beta+\gamma=0\Rightarrow\beta=0$

$(2)\Rightarrow3.(-\gamma)+3.(0)+2\gamma=0$

$\Rightarrow-3\gamma+2\gamma=0\Rightarrow-\gamma=0\Rightarrow\gamma=0$

$\Rightarrow\alpha=0$

ومنه: $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ب- ايجاد مصفوفة العبور P من الأساس القانوني B الى الأساس B':

$a=(1,3,-1)=1.e_1+3.e_2+(-1)e_3$

$b=(1,3,0)=1.e_1+3.e_2+0.e_3$

$c=(1,2,-1)=1.e_1+2.e_2+(-1).e_3$

$$\Rightarrow P=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

نلاحظ أن: مصفوفة العبور من الأساس القانوني B الى الأساس B' تحصلنا عليها من كتابة أشعة الأساس B' بدلالة أشعة الأساس B.

* تعيين P^{-1}:

P^{-1}: هي مصفوفة العبور من الأساس B' الى الأساس القانوني B.

أي: نتحصل عليها من كتابة أشعة الأساس القانوني B بدلالة أشعة الأساس B'.

لدينا مما سبق:

$$\begin{cases}a=e_1+3e_2-e_3 & \ldots(1)\\ b=e_1+3e_2 & \ldots(2)\\ c=e_1+2e_2-e_3 & \ldots(3)\end{cases}$$

$(1)-(2)\Rightarrow a-b=-e_3$

$\Rightarrow e_3=-a+b$

$(1)-(3)\Rightarrow a-c=e_2$

$(2)\Rightarrow b=e_1+3(a-c)$

$\Rightarrow b=e_1+3a-3c$

$\Rightarrow e_1=-3a+b+3c$

اذن:

$$\begin{cases}e_1=(-3).a+1.b+3.c\\ e_2=1.a+0.b+(-1).c\\ e_3=(-1).a+1.b+0.c\end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

ج- ايجاد مصفوفة f في الأساس B' باستخدام مصفوفة العبور:

$$M(f,B',B')=P^{-1}.M(f,B,B).P$$

$$M(f,B',B')=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -6 & -7 & -3\end{pmatrix}$$

د. ايجاد مصفوفة f في الأساس B باستخدام التعريف :

$$f(a) = f(1,3,-1)$$
$$= (-2,0,2)$$
$$= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$$
$$= \alpha_1(1,3,-1) + \beta_1(1,3,0) + \gamma_1(1,2,-1)$$
$$= (\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\ 3\alpha_1+3\beta_1+2\gamma_1,\ -\alpha_1-\gamma_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = -2 & \dots (1) \\ 3\alpha_1+3\beta_1+2\gamma_1 = 0 & \dots (2) \\ -\alpha_1-\gamma_1 = 2 & \dots (3) \end{cases}$$

$(1)+(3) \Rightarrow \beta_1 = 0$

$(3) \Rightarrow \alpha_1 = -\gamma_1 - 2$

$(2) \Rightarrow 3(-\gamma_1-2)+3.0+2\gamma_1 = 0$

$\Rightarrow -3\gamma_1 - 6 + 2\gamma_1 = 0$

$\Rightarrow -\gamma_1 = 6 \Rightarrow \gamma_1 = -6$

$\alpha_1 = -\gamma_1 - 2 = 6 - 2 \Rightarrow \alpha_1 = 4$

إذن :

$$\boxed{f(a) = 4a + 0.b - 6.c}$$

$$f(b) = f(1,3,0)$$
$$= (-2,1,3)$$
$$= \alpha_2 . a + \beta_2 . b + \gamma_2 . c$$
$$= \alpha_2(1,3,-1) + \beta_2(1,3,0) + \gamma_2(1,2,-1)$$
$$= (\alpha_2+\beta_2+\gamma_2,\ 3\alpha_2+3\beta_2+2\gamma_2,\ -\alpha_2-\gamma_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = -2 & \dots (1') \\ 3\alpha_2+3\beta_2+2\gamma_2 = 1 & \dots (2') \\ -\alpha_2-\gamma_2 = 3 & \dots (3') \end{cases}$$

$(1')+(3') \Rightarrow \beta_2 = 1$

$(3') \Rightarrow \alpha_2 = -\gamma_2 - 3$

$(2') \Rightarrow 3(-\gamma_2-3)+3(1)+2\gamma_2 = 1$

$\Rightarrow -3\gamma_2 - 9 + 3 + 2\gamma_2 = 1 \Rightarrow \gamma_2 = -7$

$\alpha_2 = -\gamma_2 - 3 = 7 - 3 \Rightarrow \alpha_2 = 4$

إذن :

$$\boxed{f(b) = 4a + 1.b + (-7).c}$$

$$f(c) = f(1,2,-1)$$
$$= (-1,0,1)$$
$$= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c$$
$$= \alpha_3(1,3,-1) + \beta_3(1,3,0) + \gamma_3(1,2,-1)$$
$$= (\alpha_3+\beta_3+\gamma_3,\ 3\alpha_3+3\beta_3+2\gamma_3,\ -\alpha_3-\gamma_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 = -1 & \dots (1'') \\ 3\alpha_3+3\beta_3+2\gamma_3 = 0 & \dots (2'') \\ -\alpha_3-\gamma_3 = 1 & \dots (3'') \end{cases}$$

$(1'')+(3'') \Rightarrow \beta_3 = 0$

$(3'') \Rightarrow \alpha_3 = -\gamma_3 - 1$

$(2'') \Rightarrow 3(-\gamma_3-1)+3.0+2\gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -3\gamma_3 - 3 + 2\gamma_3 = 0$

$\Rightarrow -\gamma_3 = 3 \Rightarrow \gamma_3 = -3$

$\alpha_3 = -\gamma_3 - 1 = 3 - 1 \Rightarrow \alpha_3 = 2$

إذن :

$$\boxed{f(c) = 2.a + 0.b - 3.c}$$

$$\Rightarrow M(f,B',B') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(a) & f(b) & f(c) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}$$