جامعة محمد خيضر بسكرة
قسم الرياضيات

السنة الأولى
MI
مقياس جبر 2
2019/2020

حلول تمارين السلسلة رقم 03
التطبيقات الخطية

التمرين 01 ليكن التطبيقين

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

1- بين أن f و g خطيين

يجب إثبات أن: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = \alpha f(x,y) + \beta f(x',y').$$

$$f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$$
$$= \left(\frac{(\alpha x+\beta x') - (\alpha y + \beta y')}{2}, \frac{(\alpha y + \beta y') - (\alpha x + \beta x')}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha(x-y) + \beta(x'-y')}{2}, \frac{\alpha(y-x) + \beta(y'-x')}{2}\right)$$
$$= \alpha\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) + \beta\left(\frac{x'-y'}{2}, \frac{y'-x'}{2}\right)$$
$$= \alpha f(x,y) + \beta f(x',y')$$

وهو المطلوب ومنه f تطبيق خطي.

إثبات أن g تطبيق خطي:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

يجب إثبات أن:

$$g(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = \alpha g(x,y) + \beta g(x',y').$$

$$g(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = g(\alpha x+\beta x', \alpha y + \beta y')$$

$$= (2(\alpha x+\beta x') - (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'))$$

$$= (\alpha(2x-y) + \beta(2x'-y'), \alpha(x-y) + \beta(x'-y'))$$

$$= \alpha(2x-y, x-y) + \beta(2x'-y', x'-y')$$

$$= \alpha g(x,y) + \beta g(x',y')$$

ومنه g تطبيق خطي.

2)

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$$

$$= \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,1) \ / x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$$

$$\mathrm{Ker} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (2x-y, x-y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x-y=0 \wedge x-y=0\}$$

$$= [\{(0,0)\}]$$

$$Im f = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / \exists x,y \in \mathbb{R} : (X,Y) = f(x,y)\}$$
$$= \left\{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) / x,y \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\frac{x-y}{2}(1,-1) / x,y \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= [\{(1,-1)\}]$$

$$Im g = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 / \exists x,y \in \mathbb{R} : (X,Y) = g(x,y)\}$$
$$= \{(2x-y, x-y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(2,1) - y(1,1) / x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= [\{(2,1),(1,1)\}]$$

$rg f = 1$ و $rg g = 2$

3) f ليس متباين لأن $Ker f \neq (0,0)$

g متباين لأن $Ker g = (0,0)$

f ليس غامر لأن $Im f \neq \mathbb{R}^2$

g غامر لأن $Im g = \mathbb{R}^2$

4) حل

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f \Leftrightarrow \begin{cases} ① & \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \\ ② & \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

* $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{X \in \mathbb{R}^2 / X \in \mathrm{Ker}f \wedge X \in \mathrm{Im}f\}$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{R} : X = \alpha(1,1) \\ \exists \beta \in \mathbb{R} : X = \beta(1,-1) \end{array}\right\}$$

$\alpha(1,1) = \beta(1,-1) \Rightarrow (\alpha,\alpha) = (\beta,-\beta)$

$\Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

$\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Leftarrow X = (0,0)$ ومنه

* $\dim(\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f) = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f - \dim(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f)$

$$= 1 + 1 - 0$$
$$= 2$$
$$= \dim \mathbb{R}^2$$

* $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ ومنه

(5

$$u \in \mathrm{Im} f \Rightarrow f(u) = u$$

$$u \in \mathrm{Im} f \Rightarrow u = \alpha(1,-1) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= (\alpha, -\alpha)$$

$$f(u) = f(\alpha,-\alpha) = \left(\frac{\alpha+\alpha}{2}, \frac{-\alpha-\alpha}{2}\right)$$

$$= (\alpha, -\alpha) = u$$

ومنه $f(u) = u$

التمرين 02 : ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ خطي بحيث:

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$f(e_2) = 3e_1 + 4e_2$$
$$f(e_3) = -e_1$$

$e_1 = (1,0,0)$

$e_2 = (0,1,0)$

$e_3 = (0,0,1)$

1) ليكن $a = (0,0,1)$ ، $b = (1,0,1)$ ، $c = (1,1,1)$ أوجد $f(a)$ ، $f(b)$ ، $f(c)$ دون حساب عبارة f.

$$f(a) = f(e_3) = -e_1 = (-1,0,0)$$

$$f(b) = f(1,0,1) = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3)$$

لأن f خطي

$$f(b) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 - e_1$$
$$= e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$= (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,2)$$
$$= (1,1,2)$$

$$f(c) = f(1,1,1) = f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)$$
$$= 2e_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_1 + 4e_2 - e_1$$
$$= 4e_1 + 5e_2 + 2e_3$$
$$= (4,5,2)$$

2) أوجد عبارة $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$$
$$=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$$
$$=x(2e_1+e_2+2e_3)+y(3e_1+4e_2)+z(-e_1)$$
$$=x(2,1,2)+y(3,4,0)+z(-1,0,0)$$
$$=(2x+3y-z\,,\,x+4y\,,\,2x)$$

3) $B'=\{a,b,c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

يكفي إثبات الاستقلال الخطي

$$\alpha(0,0,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta+\gamma=0\\ \gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

ومنه الجملة B' مستقلة خطيا. اذن تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$

4) هل الجملة $B''=\{f(a),f(b),f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(-1,0,0)+\beta(1,1,2)+\gamma(4,5,2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta+4\gamma=0\\ \beta+5\gamma=0\\ 2\beta+2\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

ومنه الجملة B'' تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$

5) بما أننا وجدنا أن صورة أساس هي أساس
فإن f تقابل

التمرين 03: ليكن $\mathbb{P}_1(X)$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة 1
أو أقل ذات معاملات حقيقية، نعرف التطبيق:

$$g : \mathbb{P}_1(X) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$p \rightarrow g(p) = (p(-1) , p(1))$$

بين أن g خطي تقابلي.

$p(x) = ax + b$ $\quad$ $g(p) = (p(-1), p(1)) = (b-a , a+b)$

$q(x) = cx + d$ $\quad$ $g(q) = (q(-1), q(1)) = (d-c , c+d)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} , \forall p, q \in P_1(X)$

$$g(\alpha p + \beta q) = g(\alpha a x + \alpha b + \beta c x + \beta d)$$
$$= g((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d))$$
$$= ((\alpha b + \beta d) - (\alpha a + \beta c) , (\alpha a + \beta c) + (\alpha b + \beta d))$$
$$= (\alpha(b-a) + \beta(d-c) , \alpha(a+b) + \beta(c+d))$$
$$= \alpha(b-a , a+b) + \beta(d-c , c+d)$$
$$= \alpha g(p) + \beta g(q)$$

ومنه g تطبيق خطي.

$\{1, x\}$ أساس لـ $\mathbb{P}_1(X)$ يكفي أن نبين أن صورة أساس
هي أساس $g(1) = (1, 1) , g(x) = (-1, 1)$

الجملة $\{(1,1),(-1,1)\}$ مستقلة خطيا إذن فهي أساس
لـ $\mathbb{R}^2$
ومنه g تطبيق تقابلي.