TD 2 (Les équations différentielles)

Université de Mohamed khider Biskra

Département de Génie Electrique (1 ère énergie renouvelable)

Exercice :

1. $y' - 3y = 0$.

2. $y' + y = x$.

3. $y' + 5y = (x\,2 + x + 1)e^{-3x}$.

4. $y' - 2y = \cos 3x - 5 \sin 3x$.

5. $y' + 5y = (53 \cos(7x) + 53 \sin(7x))e^{-3x}$.

La solution d'exercice :

1. Résolution de l´´equation homogène $y'(x) - 3y(x) = 0$.

la solution générale de l´´equation est **$y_G(x) = ke^{-(-3x)} = ke^{3x}$, ou $k \in \mathbb{R}$.**

2. Résolution de l'équation avec second membre $y' + y = x$.

La solution homogène de l'équation est $y' = ke^{-x}$, ou $k \in \mathbb{R}$.

Recherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\,x + b$ Nous avons alors $y'_p(x) = a$.

De plus, $y'_p(x) + y_p(x) = a + (ax + b) = x$.

Donc $a + b + ax = x$

On identifie les coefficients du polynôme du membre de gauche avec ceux du membre de droite. On obtient :

$\{a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$\{a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

Ainsi, la solution générale est **$y_G(x) = y' + y_p(x) = ke^{-x} + x - 1$.**

3. Résolution de l'équation avec second membre $y'(x) + 5y(x) = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$.

L'application directe du Théorème 1 nous donne $y_0(x) = ke^{-5x}$.

Ici, a = 5, on a donc $\theta + a = -3 + 5 = 2 \neq 0$. Nous cherchons alors une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$.

Cela donne $y'_p(x) = (2ax + b)e^{-3x} - 3(ax^2 + bx + c)e^{-3x}$. De plus, $y'_p(x) + 5y_p(x) = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$, donc : $(2ax + b)e{-3x} - 3(ax^2 + bx + c)e^{-3x} + 5(ax^2 + bx + c)e^{-3x} = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$
(1)

(1) $\Rightarrow 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c\ \ e^{-3x} = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$

On identifie les coefficients du membre de gauche avec ceux du membre de droite. On obtient :

$2a = 1 \quad \Rightarrow a = 1/2$

$2a + 2b = 1 \quad \Rightarrow b = 0$

$b + 2c = 1 = \quad \Rightarrow \quad c = 1/2$

Ainsi, la solution générale est **$y_G(x) = (1/2\, x^2 + 1/2)\ e^{-3x} + ke^{-5x}$**

4. Résolution de l'équation $y'(x) - 2y(x) = \cos 3x - 5 \sin 3x$.

L'application directe du Théorème 1 nous donne $y_0(x) = ke^{2x}$.

Nous cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$.

Cela donne $y'_p(x) = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$.

De plus $-3A \sin 3x + 3B \cos 3x - 2(A \cos 3x + B \sin 3x) = \cos 3x - 5 \sin 3x$.........(2)

Alors,

(2) $\Rightarrow (-2A + 3B) \cos 3x + (-3A - 2B) \sin 3x = \cos 3x - 5 \sin 3x$.

On identifie les coefficients et on obtient :

$\{-2A + 3B = 1 \Rightarrow A = 1$

$\{-3A - 2B = -5 \Rightarrow B = 1$.

Ainsi, la solution générale est **$y_G(x) = \cos 3x + \sin 3x + ke^{2x}$.**

5. $y'(x) + 5y(x) = (53 \cos 7x + 53 \sin 7x)e^{-3x}$.

L'application directe du Théorème 1 nous donne $y'(x) = ke^{-5x}$, $k \in R$.

Nous cherchons une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = (A \cos(7x) + B \sin(7x))\, e^{-3x}$,

$A, B \in R$. Nous avons alors :

$y'_p(x) = (-7A \sin 7x + 7B \cos 7x)\, e^{-3x} + (A \cos(7x) + B \sin 7x).(-3).e^{-3x} = ((-3A + 7B) \cos 7x + (-7A - 3B) \sin 7x)\, e^{-3x}$

De plus, $y'_p(x) + 5y_p(x) = (53 \cos 7x + 53 \sin 7x)\, e^{-3x}$,

donc $y'_p(x) + 5y_p(x) = ((-3A + 7B) \cos 7x + (-7A - 3B) \sin 7x)\, e^{-3x} + 5\,(A \cos 7x + B \sin 7x)\, e^{-3x}$

$= ((2A + 7B) \cos 7x + (-7A + 2B) \sin 7x)\, e^{-3x}$

$= (53 \cos 7x + 53 \sin 7x)\, e^{-3x}$

On identifie les coefficients et on obtient :

$\{2A + 7B = 53 \Rightarrow A = -5$

$\{-7A + 2B = 53 \Rightarrow B = 9.$

Ainsi, la solution générale est **$y_G(x) = ke^{-5x} + (-5 \cos 7x + 9 \sin 7x)\, e^{-3x}$, $k \in R$.**