جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقياس جبر2
2020/2019

السلسلة رقم 04

المصفوفات والتطبيقات الخطية والمحددات

<u>التمرين 04</u>: احسب بطريقتين محدد المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

(حساب قيمة) المحددات :

من المرتبة الثانية :ليكن لدينا محدد من المرتبة الثانية ، أي محدد سطرين وعمودين : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ عندئذٍ لحساب قيمة هذا المحدد نقوم بحساب جداء القطر الرئيسي مطروحاً منه جداء القطر الثانوي أي :

القطر الرئيسي القطر الثانوي

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

مثال : احسب قيمة المحددات التالية :

$$1)\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad , \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \quad , \quad 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1)\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (6 \times 5) - (3 \times 2) = 30 - 6 = 24$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (1 \times 3) - (5 \times 9) = 3 - 45 = -42$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = \big(1 \times (-3)\big) - \big((-3) \times 2\big) = -3 + 6 = 3$$

من المرتبة الثالثة أو أكثر :

ليكن لدينا محدد من المرتبة n ، أي بـ n سطر و n عمود من الشكل $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ عندئذٍ لحساب قيمة المحدد التالي نقوم بنشره وفقاً لأي سطر أو أي عمود مع تناوب الإشارات على النحو التالي (مثلا بالنسبة للسطر الأول) :

$$\begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & + \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ونقوم بضرب كل عنصر من ذلك السطر بالمحددات الأصغرية التي تنتج عن حذف السطر و العمود الموافقين لذلك العنصر ونقوم بتكرار ذلك حتى نصل إلى محددات أصغرية من المرتبة الثانية يمكن حسابها بسهولة .

مثال : احسب قيمة المحددات التالية :

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad 2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad 3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

نقوم بالحساب وفقاً للسطر الأول : (يمكن النشر وفق أي سطر أو أي عمود)

$$1)\begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{2} & \overset{+}{4} \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \big(3 \times (-6)\big) - \big(2 \times (-8)\big) + \big(4 \times (20)\big) = -18 + 16 + 80 = 78$$

خواص المحدد: ليكن $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

- نضرب محدد المصفوفة في العدد -1 كلما أجرينا تبديل بين عمودين او سطرين

مثال: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

علما أن :

$$det(A) = |A| = -4$$

استنتج قيمة المحددات التالية:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة B هي مصفوفة ناتجة عن المصفوفة A و ذلك بتبديل العمود الاول مع العمود الثاني و بالتالي فإن:

$$det(B) = |B| = 4$$

أي تتغير الاشارة فقط.

أما المصفوفة C فهي ناتجة عن المصفوفة A و ذلك بتبديل السطر الثاني مع السطر الثالث و منه فإن:

$$det(C) = |C| = 4$$

- لا تتغير قيمة المحدد إذا أضيف إلى أي عمود (سطر) مزج خطي لبقية الاعمدة (الاسطر).

مثال: لتكن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

أحسب محدد المصفوفة A ثم استنتج قيمة المحددات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 14 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$det(A) = 25$$

أما المصفوفة B فمن الواضح انها ناتجة عن المصفوفة A و ذلك باضافة العمود الثاني و الثالث الى العمود الاول و بالتالي و حسب الخاصية السابقة فإن:

$$det(B) = 25$$

أما المصفوفة D فمن الواضح انها ناتجة عن المصفوفة A و ذلك بضرب السطر الثاني العدد 3 بينما ضرب السطر الثالث في العدد 2 و أضفنا مجموعهما الى السطر الاول و بالتالي و حسب الخاصية السابقة فإن:

$$det(D) = 25$$

- إذا كانت الاعمدة أو الاسطر مرتبطة خطيا فإن محدد المصفوفة يكون معدوما.

مثال: لتكن المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 15\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن الاعمدة مرتبطة خطيا و هذا لان:

$$(1,3,-1)=-2(2,6,3)+(5,15,5)$$

نتيجة: إذا كان المحدد معدوما فإن الاسطر او الاعمدة هي اشعة مرتبطة خطيا

- محدد المصفوفة يساوي محدد منقولها أي:

$$\boldsymbol{det(A)=det(A^T)}$$

نتيجة: لدينا النتيجة المهمة التالية:

$$det(A.B)=det(A)det(B)$$

مثال: لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

لدينا حسب ما سبق ان:

$$det(A)=25, det(D)=4 \Rightarrow \boldsymbol{det(A.D)=det(A).det(D)}=25\times 4=100$$

- محدد مصفوفة مثلثية سفلية (أو علوية) يساوي إلى جداء عناصر قطرها الرئيسي

مثال :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=14=|A|$$

المصفوفة المثلثية:

1) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها الواقعة تحت عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر مصفوفة مثلثية عليا.

2) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها الواقعة أعلى عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر مصفوفة مثلثية سفلى.