**Td Algèbre (département génie civil et hydraulique)**

**Exercice 01 :**

On considère dans IR3, Deux sous ensembles F et E défini par :

F = {(x, y, z) ∈ IR3 /2x + y − z = 0}

E = {(x − y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z ∈ IR}

Montrer que F est un sous espace vectoriel de IR3.

**Solution :**

(1) : F est s.e.v ⇔

* F ≠ ∅,
* ∀X, Y ∈ F, ∀λ, µ ∈ IR, λ.X + µ.Y ∈ F

– 0 IR3 = (0, 0, 0) ∈ F ⇒ F ≠ ∅, car 2.0 + 0 − 0 = 0.

– ∀ X = (x, y, z), Y = (x’ , y’ , z’ ) ∈ F, λ, µ ∈ IR montrons que : λ(x, y, z) + µ(x ‘ , y’ , z’ )∈ ?F,

c’est à dire (λx + µx’, λy + µy’ , λz + µz’ )∈ ?F

2(λx+µx’ ) + (λy +µy’ )−(λz +µz’ ) = λ(2x+y −z) +µ(2x’ +y’ –z’ ) = λ.0 +µ.0 = 0, car :

(x, y, z) ∈ F ⇒ 2x + y − z = 0, et(x’ , y’ ; z’ ) ∈ F ⇒ 2x 0 + y 0 − z 0 = 0.

Ainsi λ(x, y, z) + µ(x’, y’, z’ ) ∈ F,

F est sous espace vectoriel de IR3.

(2)

* (0, 0, 0) ∈ F car (0, 0, 0) = (0 − 0, 2.0 + 0 + 4.0, 3.0 + 2.0) ⇒ F ≠ ∅.
* ∀X, Y ∈ F, λ, µ ∈ IR montrons que λX + µY ∈ ?F ;

on a : X ∈ F ⇔ ∃(x, y, z) ∈ IR3 /X = (x − y, 2x + y + 4z, 3y + 2z), Y ∈ F ⇔ ∃(x’ , y’ , z’) ∈ IR3

Y = (x’− y’, 2x’+ y’+ 4z’, 3y’ + 2z’ ), λX + µY = (λx + λy + λz, λx − λy, λz) + (µx’+ µy’+ µz’, µx’ − µy’ , µz’ ) λX+µY = ((λx+µx’)−(λy+µy’ ), 2(λx+µx’ )+(λy+µy’ )+4(λz+µz), 3(λy+µy’ )+2(λz+µz)

d’où ∃x’’ = λx + µx’ , ∃y’’= λy + µy’ , ∃z’’= λz + µz’,

ainsi λX + µY = (x’’− y’’+, 2x’’+ y ‘’+ 4z’’, 3y’’+ 2z’’) ∈ F.

**Exercice 02**

On considère dans IR4 , le sous ensemble F défini par :

F = {(x, y, z, t) ∈ IR4 /(x + z = 0) ∧ (y + t = 0)}

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de IR3.

(2) Donner une base de F, déduire sa dimension.

**Solution :**

(1)

* (0, 0, 0, 0) ∈ F ⇒ F ≠ ∅, car (0 + 0 = 0) ∧ (0 + 0 = 0).
* ∀X = (x, y, z, t), Y = (x’, y’ , z’, t’) ∈ F, λ, µ ∈ IR montrons que :

λ(x, y, z, t) + µ(x’ , y’, z’, t’)∈ ?F, c’est à dire (λx + µx’, λy + µy’, λz + µz’, λt + µt’)∈ ?F

X ∈ F ⇒ (x + z = 0) ∧ (y + t = 0) Y ∈ F ⇒ (x’+ z’= 0) ∧ (y’+ t’= 0) ⇒

λ(x + z) = 0 ∧ µ(x’+ z’) = 0

⇒ λx + µx’+ λz + µz’= 0 ∧ λ(y + t) = 0 ∧ µ(y’+ t’) = 0 ⇒ λy + µy’+ λt + µt’= 0

ainsi λx + µx’+ λz + µz’= 0 ∧ λy + µy’+ λt + µt’ = 0

c’est dire λ(x, y, z, t) + µ(x’, y’, z’ , t’ ) ∈ F d’où le résultat

(2) Base de F : soit X ∈ F ⇔ x = −z ∧ y = −t,

X = (x, y, z, t) = (x, y, −x, −y) = x (1, 0, −1, 0) + y(0, 1, 0, −1),

ainsi F = {x(1, 0, −1, 0) + y(0, 1, 0, −1)/x, y ∈ IR}.

D’où F est engendré par {v1 = (1, 0, −1, 0), v2 = (0, 1, 0, −1)}, montrons que cette famille est libre si et seulement si ∀ λ1, λ2 ∈ IR, λ1v1 + λ2v2 = (0, 0, 0, 0) ⇒ λ1 = λ2 = 0. λ1 (1, 0, −1, 0) + λ2(0, 1, 0, −1) = (0, 0, 0, 0) ⇒ (λ1, λ2, −λ1, −λ2) = (0, 0, 0, 0) d’où le résultat. Alors la dimension de F est égale à 2, car {v1, v2} est une base ( libre et génératrice) de IR4

**Exercice 03**

(1) Montrer que la famille {(1, 2),(−1, 1)} est génératrice de IR2 .

(2) quelle sont les famille libre parmis les familles suivantes : F1 = {(1, 1, 0),(1, 0, 0),(0, 1, 1)}, F2 = {(0, 1, 1, 0),(1, 1, 1, 0),(2, 1, 1, 0)}.

(3) Montrer que la famille {(1, 2),(−1, 1)} est une base de IR2 , et que la famille F1 = {(1, 1, 0),(1, 0, 0),(0, 1, 1)} est une base de IR3 .

**Solution :**

(1) La famille {(1, 2),(−1, 1)} est génératrice de IR2 si et seulement si ∀ X = (x, y) ∈ IR2 , ∃ λ, µ ∈ IR/X = λ(1, 2) + µ(−1, 1).

Soit (x, y) ∈ IR2, cherchons λ, µ ∈ IR tel que : (x, y) = λ(1, 2) + µ(−1, 1) = (λ − µ, 2λ + µ) ainsi x = λ − µ, ....(1)

y = 2λ + µ, ....(2)

(1) + (2) ⇒ λ = x + y 3 et µ = −2x + y 3

d’où cette famille est génératrice.

(2) quelle sont les familles libre parmis les familles suivantes :

F1 = {(1, 1, 0),(1, 0, 0),(0, 1, 1)},

F2 = {(0, 1, 1, 0),(1, 1, 1, 0),(2, 1, 1, 0)}.

* i) F1 = {(1, 1, 0),(1, 0, 0),(0, 1, 1)} est libre si et seulement si ∀ λ1, λ2, λ3 ∈ IR, λ1(1, 1, 0) + λ2(1, 0, 0) + λ3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) ⇒ λ1 = λ2 = λ3 = 0.

λ1(1, 1, 0) + λ2(1, 0, 0) + λ3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) ⇔

λ1 + λ2 = 0 λ1 + λ3 = 0 λ3 = 0 ⇔

λ1 = 0 λ2 = 0 λ3 = 0 F1 est libre.

* ii) F2 = {(0, 1, 1, 0),(1, 1, 1, 0),(2, 1, 1, 0)} est n’est pas libre car ∃λ1 = 1, λ2 = −2, λ3 = 1 ∈ IR, λ1(0, 1, 1, 0) + λ2(1, 1, 1, 0) + λ3(2, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0).

(3) La famille {(1, 2),(−1, 1)} est une base de IR2 , car quand le nombre de vecteurs=2=dim IR2 il suffit de montrer qu’elle est soit génératrice ou bien libre pour qu’elle puisse être une base or d’après la question (1) elle est génératrice d’où le résultat.

La famille F1 = {(1, 1, 0),(1, 0, 0),(0, 1, 1)} est une base de IR3 , car le cardinale de F1 est égale à 3 = dim IR3 est F1 étant libre, alors c’est une base de IR3 .

**Exercice 04**

Soit l’application f définie de IR2 dans IR2 par :

f(x, y) = (x + y, x − y).

(1) Monter que f est linéaire.

(2) Déterminer ker f, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

(3) Déterminer f ◦ f

**Solution :**

(1) f est linéaire si et seulement si ∀ α, β ∈ IR, ∀ (x, y),(x’ , y’ ) ∈ IR2 ; f(α(x, y) + β(x ‘ , y’)) = αf(x, y) + βf(x’ , y’ ).

f(α(x, y) + β(x’ , y’)) = f(αx + βx’ , αy + βy’) = (αx + βx’ + αy + βy’ , αx + βx’ − αy – βy’ ) = (αx + αy, αx − αy) + (βx’ + βy’ , βx’ – βy’ ) = α(x + y, x − y) + β(x ‘+ y’ , x’ – y’ ) = αf(x, y) + βf(x’ , y’ )

d’où f est linéaire.

(2) Déterminons ker f, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

ker f = {(x, y) ∈ IR2 /f(x, y) = (0, 0)} = {(x, y) ∈ IR2 /x + y = 0 ∧ x − y = 0} = {(0, 0)} ainsi

dim ker f = 0.

Imf = {(x + y, x − y)/(x, y) ∈ IR2 } = {x(1, 1) + y(1, −1)/(x, y) ∈ IR2 }. Ainsi Imf est engendré par deux vecteur qui sont libre, alors dim Imf = 2. Sachant que la dimension de l’ensemble de départ est égale à la dimension de l’ensemble d’arrivée f est bijective si elle est soit injective ou bien surjective or f est injective car ker f = {(0, 0)} et aussi surjective car dim IR2 = dim Imf = 2 c’est à dire Imf = IR2.

(3) Soit (x, y) ∈ IR2 ) on a f ◦ f(x, y) = f(f(x, y)) = f(x + y, x − y) = ((x + y) + (x − y),(x + y) − (x − y)) = (2x, 2y) = 2(x, y) = 2 IdIR2

**Exercice 05.**

Soit l’application f définie de IR2 dans IR2 par : f(x, y) = (2x − 4y, x − 2y).

(1) Monter que f est linéaire.

(2) Déterminer ker f, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

**Solution :**

(1) f est linéaire si et seulement si ∀ α, β ∈ IR, ∀ (x, y),(x ‘, y’ ) ∈ IR2 ; f(α(x, y) + β(x’ , y’ )) = αf(x, y) + βf(x ‘, y’ ).

f(α(x, y) + β(x’ , y’)) = f(αx + βx’ , αy + βy’ ) = (2αx + 2βx’ − 4αy − 4βy’ , αx + βx’ − 2αy − 2βy’) = (2αx − 4αy, αx − 2αy) + (2βx’ − 4βy’ , βx’ − 2βy’) = α(2x − 4y, x − 2y) + β(2x’− 4y’ , x’ − 2y’) = αf(x, y) + βf(x’, y)

d’où f est linéaire.

(2) Déterminons ker f, et Imf et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

ker f = {(x, y) ∈ IR2 /f(x, y) = (0, 0)} = {(x, y) ∈ IR2 /2x − 4y = 0 ∧ x − 2y = 0} = {(x, y) ∈ IR2 /x = 2y} = {(2y, y)/y ∈ IR} = {y(2, 1)/y ∈ IR}.

ainsi ker f est engendré par le vecteur (2, 1) 6= 0, ainsi dim ker f = 1, f, alors n’est pas injective.

Imf = {(2x − 4y, x − 2y)/(x, y) ∈ IR2 } = {x(2, 1) + y(−4, −2)/(x, y) ∈ IR2 }. Ainsi Imf est engendré par deux vecteur qui ne sont pas libre car (−4, −2) = −2(2, 1) alors dim Imf = 1 on peut aussi utliser le fait que la dimension de l’ensemble de départ est égale à la dimension de l’ensemble d’arrivée f, alors dim ker f + dim Imf = dim R2 ,⇒ dim Imf = 2 − 1 = 1.

(3) f n’est pas bijective car il n’est ni injective ni surjective.