بسم الله الرحمن الرحيم

السنة الأولى MI
مقياس جبر 2
2020 / 2019

السلسلة رقم -2-

التمرين الثالث :

$$P_2[X] = \{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 / a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

أ- $F = \{P_1, P_2, P_3\}$ مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \ \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

لدينا:

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0 \Rightarrow (\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3)(X) = 0, \forall X \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0, \forall X \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \alpha X^2 + \beta (X^2 - 2X + 1) + \gamma (X^2 + 2X + 1) = 0, \forall X \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) X^2 + (-2\beta + 2\gamma) X + (\beta + \gamma) = 0, \forall X \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \ldots\ldots (1) \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \ldots (2) \\ \beta + \gamma = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

بضرب (3) $2\times$ و جمعها مع (2) نجد: $4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

ومنه $\beta = 0$.

بتعويض قيمة γ و β في (1) نجد $\alpha = 0$

إذن

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه الجملة F مستقلة خطيا

نعلم أن $\{1, X, X^2\}$ تشكل أساس لـ $P_2[X]$ و $\dim P_2[X]=3$

بما أن $\dim P_2[X] = \text{Card } F = 3$

إذن F تشكل أساس للفضاء الشعاعي $P_2[X]$

ب- استنتاج كتابة $Q(X)=12$ في هذا الأساس

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : Q = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \Rightarrow \forall X \in \mathbb{R}, Q(X) = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X)$$

$$\Rightarrow 12 = \alpha X^2 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X+1)^2$$

$$= \alpha X^2 + \beta(X^2 - 2X + 1) + \gamma(X^2 + 2X + 1)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (-2\beta + 2\gamma)X + (\beta + \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots (1) \\ -2\beta + 2\gamma = 0 \quad \dots (2) \\ \beta + \gamma = 12 \quad \dots (3) \end{cases}$$

بضرب (3) $2 \times$ وجمعها مع (2) نجد: $4\gamma = 24 \Rightarrow \gamma = 6$

بتعويض قيمة γ في (3) نجد: $\beta = 6$

وبتعويض قيمة γ و β في (1) نجد:

$\alpha + 12 = 0$

$\Rightarrow \alpha = -12$

إذن: $Q = -12 P_1 + 6 P_2 + 6 P_3$

$F=\{P_1,P_2,P_3\}$ مولدة للفضاء $P_2[X]$

$$\forall Q\in P_2[X],\ \exists \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\ Q=\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3$$

$$\Rightarrow Q[X]=(\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3)(X),\ \forall X\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a_0+a_1X+a_2X^2=\alpha P_1(X)+\beta P_2(X)+\gamma P_3(X),\ \forall X\in\mathbb{R}$$

$$=\alpha X^2+\beta(X-1)^2+\gamma(X+1)^2,\ \forall X\in\mathbb{R}$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(-2\beta+2\gamma)X+(\beta+\gamma)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=a_2 & \cdots (1)\\ -2\beta+2\gamma=a_1 & \cdots (2)\\ \beta+\gamma=a_0 & \cdots (3)\end{cases}$$

بضرب $2\times(3)$ وجمعها مع (2) نجد :

$$4\gamma=a_1+2a_0\Rightarrow \boxed{\gamma=\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{2}a_0}$$

بتعويض γ في (3) نجد :

$$\beta=a_0-\gamma=a_0-\frac{1}{4}a_1-\frac{1}{2}a_0=\boxed{\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{4}a_1}$$

من (1) نجد :

$$\alpha=a_2-\beta-\gamma=a_2-\frac{1}{2}a_0+\cancel{\frac{1}{4}a_1}\cancel{-\frac{1}{4}a_1}-\frac{1}{2}a_0$$

$$=\boxed{a_2-a_0}$$

من أجل $Q(X)=12$ ، لدينا $a_0=12,\ a_1=a_2=0$

إذن :

$$\begin{cases}\alpha=-12\\ \beta=\frac{1}{2}\cdot 12=6\\ \gamma=\frac{1}{2}\cdot 12=6\end{cases}$$