حل التمرين 03 من السلسلة رقم 03 (مقياس جبر 2)

ليكن $P_1[X]$ فضاء كثير الحدود من الدرجة 1 أو أقل ذات معاملات حقيقية، نعرف التطبيق:

$$g : P_1[X] \to \mathbb{R}^2$$
$$P \mapsto g(P) = (P(-1), P(1))$$

نبين أن g خطي تقابلي:

g خطي:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in P_1[X], g(\alpha P + \beta Q) =$$
$$\big((\alpha P + \beta Q)(-1), (\alpha P + \beta Q)(1)\big) = \big(\alpha P(-1) + \beta Q(-1), \alpha P(1) + \beta Q(1)\big)$$
$$= (\alpha P(-1), \alpha P(1)) + (\beta Q(-1), \beta Q(1))$$
$$= \alpha (P(-1), P(1)) + \beta (Q(-1), Q(1))$$
$$= \alpha g(P) + \beta g(Q).$$

g متباين:

لدينا:

$$\operatorname{Ker} g = \{P \in P_1[X] \,/\, g(P) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$
$$= \{P \in P_1[X] \,/\, (P(-1), P(1)) = (0,0)\}$$
$$= \{a + bX \,/\, P(-1) = 0 \,,\, P(1) = 0\}$$
$$= \{a + bX \,/\, a - b = 0 \,,\, a + b = 0\}$$
$$= \{a + bX \,/\, a = b = 0\}$$
$$= \{0_{P_1[X]}\}$$

ومنه g متباين.

g غامر:

$$\operatorname{Im} g = \{ g(P) \,/\, P \in \mathbb{P}_1[X] \}$$
$$= \{ (P(-1), P(1)) \,/\, P \in \mathbb{P}_1[X] \}$$
$$= \{ (P(-1), P(1)) \,/\, P = a + bX,\ a, b \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (a-b, a+b) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ a(1,1) + b(-1,1) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \}$$
$$= [\{ (1,1), (-1,1) \}]$$

إذن: $\operatorname{Im} g = [\{(1,1), (-1,1)\}] \subset \mathbb{R}^2$

حتى يكون: $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$ ، يكفي برهان أن $\dim \operatorname{Im} g = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

ندرس الاستقلالية الخطية للشعاعين $(1,1)$ ، $(-1,1)$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha(1,1) + \beta(-1,1) = (0,0) \Rightarrow (\alpha - \beta, \alpha + \beta) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

الجماعة $\{(1,1), (-1,1)\}$ مستقلة خطيا وهي مولدة لـ $\operatorname{Im} g$

إذن تشكل أساس لـ $\operatorname{Im} g$ و $\dim \operatorname{Im} g = 2$

وبالتالي $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$ ومنه g غامر

g متباين وغامر فإن g تقابلي.

طريقة 2: لدينا: $\{1, X\}$ أساس لـ $\mathbb{P}_1[X]$ ، إذا برهنا أن $(g(1), g(X))$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ فإن g تقابل حسب النظرية المشار إليها في التمرين 02،

لدينا: $g(1) = (1,1)$ و $g(X) = (-1,1)$ أي يكفي برهان أن الجملة $\{(1,1), (-1,1)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ (واضحة لأن الشعاعين مستقلان خطيا).