حل التمرين 02 من السلسلة رقم 03 (مقياس جبر 2)

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ ، $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ خطي بحيث:

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 \,,\ f(e_2) = 3e_1 + 4e_2 \,,\ f(e_3) = -e_1$$

1) ليكن: $a = (0,0,1)$ ، $b = (1,0,1)$ ، $c = (1,1,1)$

ايجاد $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(c)$ دون حساب عبارة f.

الأساس القانوني هو الأساس المعرف ب:

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$

يمكن كتابة $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ كعبارة خطية بدلالة الأساس القانوني كالآتي:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)\\ &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3\end{aligned}$$

ومنه احداثيات الشعاع (x,y,z) في الأساس القانوني هي المركبات x ، y و z.

* حساب $f(a)$:

$$f(a) = f(0,0,1) = f(e_3) = -e_1 = -(1,0,0) = (-1,0,0)$$

* حساب $f(b)$:

$$f(b) = f(1,0,1) = f(1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3) = 1\cdot f(e_1) + 0\cdot f(e_2) + 1\cdot f(e_3)$$

(لأن f خطي)

$$\begin{aligned}&= f(e_1) + f(e_3)\\ &= 2e_1 + e_2 + 2e_3 - e_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 = (1,1,2)\end{aligned}$$

* حساب $f(c)$:

$$\begin{aligned}f(c) = f(1,1,1) = f(1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3) &= 1\cdot f(e_1) + 1\cdot f(e_2) + 1\cdot f(e_3)\\ &= (2e_1 + e_2 + 2e_3) + (3e_1 + 4e_2) - e_1\\ &= 4e_1 + 5e_2 + 2e_3 = (4,5,2)\end{aligned}$$

② ايجاد عبارة $f(x,y,z)$:

لدينا :

$$f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \quad (\text{لأن } f \text{ خطي})$$
$$= x(2e_1 + e_2 + 2e_3) + y(3e_1 + 4e_2) + z(-e_1)$$
$$= (2x + 3y - z)e_1 + (x + 4y)e_2 + 2x\, e_3$$
$$= (2x + 3y - z,\ x + 4y,\ 2x).$$

③ نتحقق من أن الجملة $B' = \{a, b, c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

بما أن $\dim \mathbb{R}^3 = \operatorname{Card} B' = 3$

يكفي اثبات أن B' مستقلة خطيا أي اثبات أن :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha a + \beta b + \gamma . c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\ ?$$

لدينا :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha a + \beta b + \gamma . c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$$

$$\alpha(0,0,1) + \beta(1,0,1) + \gamma.(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(0,0,\alpha) + (\beta,0,\beta) + (\gamma,\gamma,\gamma) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\beta + \gamma ; \gamma, \alpha + \beta + \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ومنه B' أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

4) $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ ؟.

لدينا: $B'' = \{ f(a) = (-1,0,0), f(b) = (1,1,2), f(c) = (4,5,2) \}$

بما أن $\dim \mathbb{R}^3 = Card\, B'' = 3$

يكفي أن نبرهن أن الجملة B'' مستقلة خطيا.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha(-1,0,0) + \beta(1,1,2) + \gamma(4,5,2) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow (-\alpha + \beta + 4\gamma, \beta + 5\gamma, 2\beta + 2\gamma) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 & \dots (1) \\ \beta + 5\gamma = 0 & \dots (2) \\ 2\beta + 2\gamma = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow \beta = -\gamma$

$(2) \Rightarrow -\gamma + 5\gamma = 0 \Rightarrow 4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$(1) \Rightarrow \alpha = 0$ ومنه الجملة B'' مستقلة خطيا وبالتالي فهي تشكل أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

5) f تقابل؟.

يمكننا استخدام النظرية التالية:

نظرية: ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي و $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ E
إذن: f تقابل $\Leftrightarrow$ $\{f(e_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ أساس لـ F.

بما أن: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ خطي و $B' = \{a, b, c\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ وكذلك $B'' = \{f(a), f(b), f(c)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

حسب النظرية السابقة نستنتج أن f تقابل.