١

# السلسلة رقم 03

## التطبيقات الخطية

تذكير: ليكن $E$، $F$ ف. ش على $K$ و $f : E \rightarrow F$ تطبيق

يكون $f$ خطي إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x_1, x_2 \in E ; f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

أو إذا تحقق الشرطان:

1) $\forall x_1, x_2 \in E ; f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

2) $\forall \alpha \in K, \forall x \in E ; f(\alpha . x) = \alpha . f(x)$

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} ; \mathrm{Im} f = \{f(x) / x \in E\}$$

$\mathrm{Ker} f$ ف. ش. ج من $E$ و $\mathrm{Im} f$ ف. ش. ج من $F$

ولدينا: $f$ متباين $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$

$f$ غامر $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$

### التمرين 1: (1

* $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

$f$ خطي؟: لنبين أن:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 ;$

$$f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) \stackrel{?}{=} \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$

لدينا :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 ;\ f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f((\alpha x, \alpha y)+(\beta x', \beta y'))$

$$= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') = \left(\frac{(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')}{2}, \frac{(\alpha y+\beta y')-(\alpha x+\beta x')}{2}\right)$$

2

$$= \left(\frac{(\alpha x-\alpha y)+(\beta x'-\beta y')}{2}, \frac{(\alpha y-\alpha x)+(\beta y'-\beta x')}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x-\alpha y}{2}+\frac{\beta x'-\beta y'}{2}, \frac{\alpha y-\alpha x}{2}+\frac{\beta y'-\beta x'}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x-\alpha y}{2}, \frac{\alpha y-\alpha x}{2}\right)+\left(\frac{\beta x'-\beta y'}{2}, \frac{\beta y'-\beta x'}{2}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)+\beta\left(\frac{x'-y'}{2}, \frac{y'-x'}{2}\right)$$

$$= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

ومنه $f$ خطي .

* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto g(x,y) = (2x-y, x-y)$$

$g$ خطي ؟ لنثبت أن :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 ;$

$$g(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) \overset{?}{=} \alpha g(x,y)+\beta g(x',y').$$

لدينا :

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 ;$

$$g(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = g((\alpha x, \alpha y)+(\beta x', \beta y')) =$$

$$g(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') = (2(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y'), (\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')$$

$$\Rightarrow g(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = (2\alpha x + 2\beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y')$$

3

$$= ((2\alpha x - \alpha y) + (2\beta x' - \beta y'), (\alpha x - \alpha y) + (\beta x' - \beta y'))$$

$$= (2\alpha x - \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (2\beta x' - \beta y', \beta x' - \beta y')$$

$$= \alpha(2x - y, x - y) + \beta(2x' - y', x' - y')$$

$$= \alpha g(x,y) + \beta g(x',y').$$

ومنه $g$ خطي .

2- ايجاد Ker f

$$\mathrm{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\} = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,1) / x \in \mathbb{R}\} = [\{(1,1)\}]$$

ايجاد Ker g

$$\mathrm{Ker} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (2x - y, x - y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0, x - y = 0\}$$

4

لنحل الجملة :

$$\begin{cases} 2x-y=0 \quad (1) \\ x-y=0 \quad (2) \Rightarrow y=x \end{cases}$$

نعوض قيمة $y$ في (1) نجد : $2x-x=0 \Rightarrow x=0$

و منه $y=0$

إذن مجموعة الحلول هي $\{(0,0)\}$ و منه

$$\ker g=\{(0,0)\}$$

إيجاد $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f=\{f(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$=\left\{\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right) / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\left\{\underbrace{\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\alpha}(1,-1) / x,y\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\{\alpha(1,-1) / \alpha\in\mathbb{R}\}$$
$$=[\{(1,-1)\}]$$

إيجاد $\operatorname{Im} g$ :

$$\operatorname{Im} g=\{g(x,y) / (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$=\{(2x-y,x-y) / (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$=\{x(2,1)+y(-1,-1) / x,y\in\mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow Im\, g = [\{(2,1),(1,1)\}]$

5

إيجاد $rg\, f$

لدينا: $rg\, f = \dim Im\, f$

ولدينا: $Im\, f = [\{(+1,-1)\}]$ أي $\{(1,-1)\}$ جملة مولدة

لـ $Im\, f$ وبما أن الشعاع $(1,-1)$ غير معدوم فهو مستقل خطيا

إذن: $\{(1,-1)\}$ يشكل أساس لـ $Im\, f$, $rg\, f = 1$

إيجاد $rg\, g$

لدينا: $rg\, g = \dim Im\, g$.

و $Im\, g = [\{(2,1),(1,1)\}]$

لندرس الاستقلالية الخطية للشعاعين $(2,1)$ و $(1,1)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha(2,1) + \beta(1,1) = (0,0) \Rightarrow (2\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \quad (1) \\ \alpha + \beta = 0 \quad (2) \end{cases}$$

من (2) نجد $-\alpha = \beta$، نعوض في (1) نجد $2\alpha - \alpha = 0$

إذن $\alpha = 0$ و $\beta = 0$.

إذن الجملة $\{(2,1),(1,1)\}$ مستقلة خطيا وهي مولدة

لـ $Im\, g$ وبالتالي تشكل أساس لـ $Im\, g$

ومنه نستنتج ~~أن~~ أن: $rg\, g = 2$

6

3- $f$ متباين ؟ لدينا: $\mathrm{Ker} f = [\{(1,1)\}]$

ومنه $\mathrm{Ker} f \neq \{(0,0)\}$ إذن $f$ ليس متباين.

$g$ متباين ؟ لدينا: $\mathrm{Ker} g = \{(0,0)\}$ ومنه $g$ متباين

$f$ غامر ؟ لدينا: $\mathrm{Im} f = [\{(1,-1)\}]$

إذن $\mathrm{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^2$ لأن $\dim \mathrm{Im} f \neq 2$

ومنه $f$ ليس غامر

$g$ غامر ؟

لدينا: $\mathrm{Im}\, g = [\{(2,1),(1,1)\}] \subseteq \mathbb{R}^2$

و $\mathrm{rg}\, g = 2$ إذن $\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^2$

إذن $g$ غامر.

4- $\mathrm{q}.\ \mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f & (1) \\ \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{(0,0)\} & (2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$$

لدينا: $\mathrm{Ker} f \subset \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \in \mathrm{Ker} f,\ (x,y) \in \mathrm{Im} f\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \exists \alpha \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha(1,1),\ \exists \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \beta(1,-1)\}$$

$$(\alpha,\alpha) = (\beta,-\beta) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha = -\beta \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{(0,0)\}$.

$$\dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f - \underset{0}{\underbrace{\dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f)}}$$

$$= \dim \mathbb{R}^2$$

إذن $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$

وبالتالي: $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

5- نبين أنه إذا كان $u \in \mathrm{Im} f$ فإن $f(u) = u$

$$u \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / u = \alpha(1,-1) \Rightarrow f(u) = f(\alpha(1,-1))$$

$$= \alpha f(1,-1) = \alpha(1,-1) = u.$$