جامعة محمد خيضر بسكرة -
كلية العلوم والعلوم الدقيقة
وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

السنة الأولى MI
مقاييس جبر 2
2020 / 2019

(1)

السلسلة رقم -2-

التمرين الرابع : $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن الفضاء الشعاعي الجزئي $G=[\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$ ولتكن المجموعة F المعرفة كما يلي :

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$$

1. نبين أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$:

لدينا : $F\subset\mathbb{R}^3$ (من التعريف).

وشروط الفضاء الشعاعي الجزئي هي :

① $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F \; (2(0)+0-0=0) \Rightarrow F\neq\phi$

② $\forall (x,y,z),(x',y',z')\in F, \; (x,y,z)+(x',y',z')\in F?$

يكفي أن نبرهن أن :

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\in F?$$

وذلك بالتحقق من شرط المجموعة F (الخاصية المميزة لـ F)

$$2(x+x')+(y+y')-(z+z')=2x+2x'+y+y'-z-z'$$
$$=(2x+y-z)+(2x'+y'-z')$$
$$=0+0=0 \quad ((x,y,z),(x',y',z') \in F \text{ لأن})$$

$③\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in F, \lambda \cdot (x,y,z) \in F ?$

2

أي نبرهن أن $\lambda \cdot (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F ?$

لدينا:

$$2(\lambda x) + (\lambda y) - (\lambda z) = 2\lambda x + \lambda y - \lambda z$$
$$= \lambda (2x + y - z) = \lambda \cdot 0 = 0$$

إذن الشروط ①، ②، ③ محققة ومنه F ف. ش. ج من $\mathbb{R}^3$.

2- *ايجاد أساس لـ F:

لنبحث عن الجملة المولدة لـ F.

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2x + y\}$$
$$= \{(x, y, 2x+y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x, 0, 2x) + (0, y, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,2) + y(0,1,1) / x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= [\{(1,0,2), (0,1,1)\}]$$

ومنه $\{\underbrace{(1,0,2)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{u_2}\}$ هي جملة مولدة لـ F.

لندرس الاستقلالية الخطية لـ u_1, u_2.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$(\alpha, 0, 2\alpha) + (0, \beta, \beta) = (0,0,0) \Rightarrow$$
$$(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن $\{(1,0,2), (0,1,1)\}$ تشكل أساسا لـ F و

$$\dim F = \mathrm{Card}\{u_1, u_2\} = 2.$$

(3)

* ايجاد أساس لـ G :

لدينا : $G = [\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}]$ ومنه الجملة :

$\{\underbrace{(1,1,0)}_{v_1},\underbrace{(0,0,1)}_{v_2},\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}\}$ جملة مولدة لـ G

نلاحظ أن : $(1,1,1)=(1,1,0)+(0,0,1)$

إذن $\{v_1,v_2,v_3\}$ مرتبطة خطيا

و

$$G=\{\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3 / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{\alpha v_1+\beta v_2+\gamma(v_1+v_2) / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{(\alpha+\gamma)v_1+(\beta+\gamma)v_2 / \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 / \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=[\{v_1,v_2\}]$$

إذن تحصلنا على جملة مولدة أخرى لـ G

وهي $\{v_1,v_2\}$.

لندرس الاستقلالية الخطية لـ v_1,v_2

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha(1,1,0)+\beta(0,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow$

$(\alpha,\alpha,\beta)=(0,0,0) \Rightarrow \alpha=\beta=0$

ومنه $\{v_1,v_2\}$ أساس لـ G و

$\dim G=\mathrm{Card}\{v_1,v_2\}=2$

* إيجاد أساس لـ $F+G$:

$$F+G=\left\{(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x_1,y_1,z_1)\in F \text{ و } (x_2,y_2,z_2)\in G\right\}$$

$$=\left\{\alpha u_1+\beta u_2+\gamma v_1+\lambda v_2 \,/\, \alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left[\left\{u_1,u_2,v_1,v_2\right\}\right]=\left[\left\{(1,0,2),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\right\}\right]$$

$$(1,1,0)+3(0,0,1)=(1,1,3)$$

إذن $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ جملة مولدة لـ $F+G$ في $\mathbb{R}^3$

لندرس الاستقلالية الخطية للجملة:

$$\forall \alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R},\ \alpha u_1+\beta u_2+\gamma v_1+\lambda v_2=0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha=\beta=\gamma=\lambda=0$$

نلاحظ أن :

$$u_1=v_1+3v_2-u_2$$

ومنه الجملة مرتبطة خطيا و

$$F+G=\left[\left\{u_2,v_1,v_2\right\}\right]$$

لندرس الاستقلالية الخطية للجملة $\{u_2,v_1,v_2\}$

$$\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha u_2+\beta v_1+\gamma v_2=0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(0,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,0,1)=$$

$$\Rightarrow (\beta,\alpha+\beta,\alpha+\gamma)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \alpha+\beta=0\Rightarrow\alpha=0\\ \alpha+\gamma=0\Rightarrow\gamma=0\end{cases}$$

إذن $\{u_2,v_1,v_2\}$ أساس لـ $F+G$ و $\dim(F+G)=3$

$$F\cap G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z)\in F,\ (x,y,z)\in G\}$$

5

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\alpha u_1+\beta u_2,$$
$$\exists\gamma,\lambda\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\gamma v_1+\lambda v_2\}$$

ومنه ,
$$\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)=\gamma(1,1,0)+\lambda(0,0,1)$$

$$\Rightarrow(\alpha,\beta,2\alpha+\beta)=(\gamma,\gamma,\lambda)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=\gamma\\ 2\alpha+\beta=\lambda\Rightarrow 2\gamma+\gamma=\lambda\Rightarrow 3\gamma=\lambda.\end{cases}$$

$$F\cap G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \exists\gamma\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\gamma u_1+\gamma u_2\}$$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \exists\gamma\in\mathbb{R}:(x,y,z)=\gamma(u_1+u_2)=\gamma(1,1,3)\}$$

$$=\{\gamma(1,1,3)/\gamma\in\mathbb{R}\}=[\{(1,1,3)\}]$$

ومنه $\{(1,1,3)\}$ جملة مولدة لـ $F\cap G$.

$(1,1,3)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ فهو مستقل خطيا لأن

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha(1,1,3)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha=0.$$

إذن $\{(1,1,3)\}$ يشكل أساس لـ $F\cap G$ ومنه $\dim F\cap G=1$,

-3

$$\mathbb{R}^3=F\oplus G\iff\begin{cases}\mathbb{R}^3=F+G & *\\ \{0_{\mathbb{R}^3}\}=F\cap G & *\end{cases}$$

$\mathbb{R}^3\supset F+G$, $\mathbb{R}^3\subset F+G$

$F\cap G=\{\alpha(1,1,3)/\alpha\in\mathbb{R}\}$

لدينا $F\cap G\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ومنه $\mathbb{R}^3\neq F\oplus G$